Mathématique Élémentaire

Examen

(14 janvier 2003)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Niez la proposition

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \bigl(x > M \Rightarrow |f(x) - x| < M\bigr).$$

Question 2. La proposition $(\neg A \Leftrightarrow B) \vee C$ est-elle une tautologie ?

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Sachant que $\sqrt{2003} \notin \mathbb{Q}$, prouvez que $\sqrt[4]{2003} \notin \mathbb{Q}$.

Question 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Donnez une définition de « f est injective » :

(1)

- Rappelons que « f est strictement croissante » veut dire :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y). \tag{2}$$

Montrez que

$$f \text{ est strictement croissante} \Rightarrow f \text{ est injective.}$$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Cochez les cases adéquates pour obtenir une formule équivalente à $\left|\frac{a}{5}\right| < 1$:

a	$>$		5		et		a	$>$		5	
	$<$		-5		ou			$<$		-5	

Question 6. Montrez que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k < \frac{1}{8}(2n+1)^2.$$

Mathématique Élémentaire

Examen (14 janvier 2003)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Calculez (en écrivant les détails nécessaires à la compréhension du déroulement de ces calculs) :

(a) $\displaystyle\sum_{v=-2}^{t^2}(v-3)$

(b) $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{t}\sum_{p=0}^{t}(\ell^2-p^2)$

(c) $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{s}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^k$

Question 8. Soit le polynôme $p(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ où $a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$. Supposons que z_0 est un nombre complexe solution de l'équation $p(x)=\boldsymbol{i}$. Calculez la valeur de $p(\overline{z_0})$.

Mathématique Élémentaire

Examen (14 janvier 2003)

Nom :

Prénom :

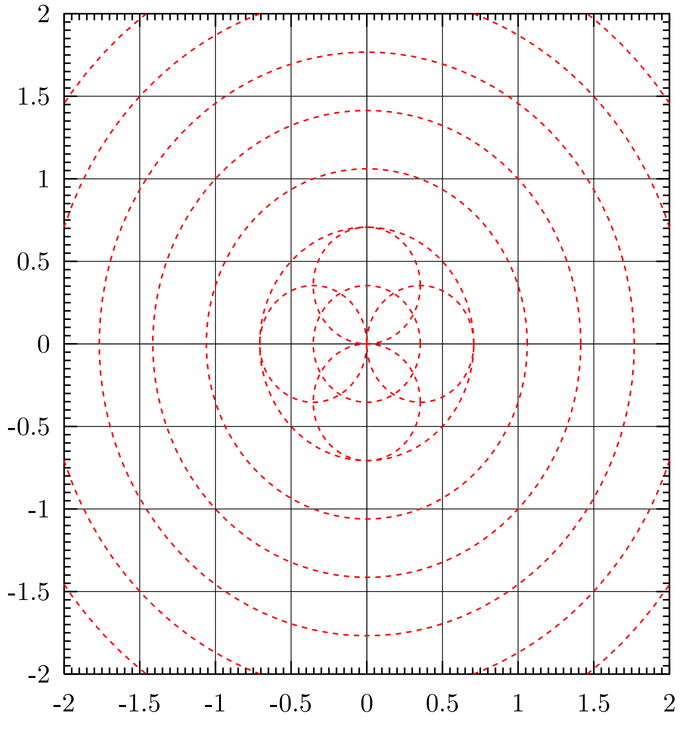
Section :

Question 9.

- Donnez toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^6 = 1$.

- En utilisant le point précécent, résolvez l'équation $z^6 = -8$. Expliquez votre démarche.

- Représentez aussi précisément que possible les solutions de l'équation $z^6 = -8$ sur le graphique ci-dessous. Expliquez votre démarche.



Nom :

Prénom :

Section :

Question 10.

- Prouvez que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

- Déduisez du point précédent que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$|z| = 1 \qquad \text{ssi} \qquad z \neq 0 \wedge \bar{z} = \frac{1}{z}.$$

- Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Supposons que $|z_1| = |z_2| = 1$. Montrez que le nombre complexe $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ est égal à son conjugué.

Question 11. Soit u, v, w trois vecteurs de $\mathbb{R}^N$ tels que $u \cdot w = v \cdot w = 2$. On définit $t = au + bv$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Calculez $t \cdot w$. Expliquez votre démarche.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

- Calculez l'inverse de A, s'il existe.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12 (suite).

- En utilisant le point précédent, résolvez le système

$$\begin{cases} x+2y-4z=0 \\ -x-y+5z=-4 \\ 2x+7y-3z=2 \end{cases}$$

Question 13. Calculez les dérivées suivantes :

- $\partial_x\left(e^{\sin(x^2+y)}\right)$

- $\partial_y\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+xy+y^2}}\right)$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 14. Pour chacune des relations suivantes, dites si elle est une fonction et, dans l'affirmative, déterminez son domaine. Justifiez vos réponses.

- $f : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $y > 0$ et $y^2 + 2 = x$.

- $g : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $y^3 - y = x$.

- $h : \mathbb{R}[X] \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : p \mapsto \int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x$. (Rappelons que $\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes en la variable X et que, pour $p \in \mathbb{R}[X]$, $p(x)$ désigne le résultat de l'évaluation de p en x.)

Question 15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $g(1) = 0$, $g(2) = 1$, $\partial g(1) = 2$ et $\partial g(2) = 4$. Calculez $\partial(f \circ g)(1)$.

Mathématique Élémentaire

Examen (14 janvier 2003)

Nom :

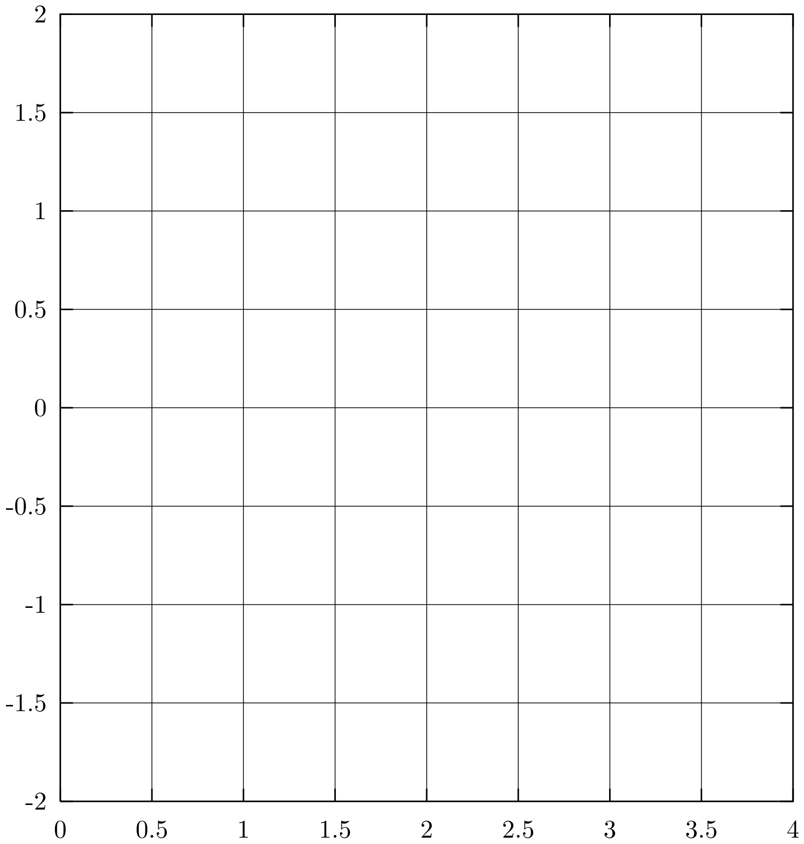
Prénom :

Section :

Question 16. Soit $f : [0,4] \to [-2,2]$ une fonction continue. On possède les informations suivantes sur f :

- $f(1) = 0$ et $f(4) = 1$;
- en $x = 2$, la droite tangente au graphe de f a pour équation $y = -2x+4$;
- f vérifie la propriété de symétrie : $\forall \xi \in [0,2],\ f(2+\xi) = -f(2-\xi)$;
- f est croissante sur $[0,1]$.

Esquissez le graphe de f sur la figure ci-dessous. Expliquez votre démarche.



Question 16 (suite). Cette fonction f est-elle injective ? Justifiez.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 17. Soit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Notons A^t la transposée de la matrice A. Montrez que A est inversible si et seulement si A^t est inversible.

Question 18. Trouvez un polynôme de degré 3, $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$, vérifiant $p(1) = 1$, $p(2) = 15$, $p(3) = 51$ et $\partial_x p(-1) = 11$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 18 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page, si nécessaire.