Mathématique Élémentaire

Examen (14 janvier 2003) **Correction**

Question 1. *Niez la proposition*

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \bigl(x > M \Rightarrow |f(x) - x| < M\bigr). \tag{1}$$

Les règles de négation des quantificateurs impliquent que la négation de (1) est

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ \neg\bigl(x > M \Rightarrow |f(x) - x| < M\bigr).$$

Comme $\neg(P \Rightarrow Q)$ est équivalent à $P \wedge \neg Q$, la négation de (1) peut encore s'écrire :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ \bigl(x > M \text{ et } |f(x) - x| \geqslant M\bigr).$$

Question 2. *La proposition $(\neg A \Leftrightarrow B) \vee C$ est-elle une tautologie ?*

Non car elle n'est pas vraie quelle que soient les valeurs de vérité de A, B et C. Par exemple, si A, B et C sont tous les trois faux, $\neg A \Leftrightarrow B$ est faux (car $\neg A$ et B ont des valeurs de vérité différentes) et donc

$$(\neg A \Leftrightarrow B) \vee C \text{ a la valeur de vérité « faux »}$$

(car c'est une disjonction de deux propositions fausses).

Remarque : On peut aussi dresser la table de vérité de $(\neg A \Leftrightarrow B) \vee C$ et voir que la colonne donnant les valeurs de vérité de $(\neg A \Leftrightarrow B) \vee C$ n'est pas entièrement remplie de 1.

Question 3. *Sachant que $\sqrt{2003} \notin \mathbb{Q}$, prouvez que $\sqrt[4]{2003} \notin \mathbb{Q}$.*

Posons $x := \sqrt[4]{2003}$. Remarquons que $x^2 = \sqrt{2003}$. Procédons par l'absurde et supposons que $x \in \mathbb{Q}$. Dès lors[1] $x^2 \in \mathbb{Q}$ ce qui en contradiction avec ce qu'on affirme savoir ci-dessus.

[1] L'appartenance de x à $\mathbb{Q}$ veut dire que $x = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0$. Dès lors, $x^2 = p^2/q^2$ avec $p^2, q^2 \in \mathbb{Z}$ et $q^2 \neq 0$ ce qui montre que $x^2 \in \mathbb{Q}$.

Question 4. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- *Donnez une définition de « f est injective » :*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- *Rappelons que « f est strictement croissante » veut dire :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y). \tag{2}$$

Montrez que

$$f \text{ est strictement croissante} \Rightarrow f \text{ est injective.}$$

Supposons que f est strictement croissante et montrons qu'elle est injective. Soit x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 \neq x_2$. Il faut prouver que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Comme $x_1 \neq x_2$, deux situations se présentent :

- soit $x_1 < x_2$ et alors, en utilisant (2) avec $x = x_1$ et $y = x_2$, on trouve que $f(x_1) < f(x_2)$ d'où $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- soit $x_1 > x_2$ et, par un raisonnement similaire, on déduit que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Dans les deux cas on arrive donc bien à la conclusion $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Question 5. *Cochez les cases adéquates pour obtenir une formule équivalente à* $\left|\frac{a}{5}\right| < 1$ *:*

a	$>$	✔	5		*et*	✔	a	$>$		5	✔
	$<$		-5	✔	*ou*			$<$	✔	-5	

ou

a	$>$		5	✔	*et*	✔	a	$>$	✔	5	
	$<$	✔	-5		*ou*			$<$		-5	✔

Question 6. *Montrez que, pour tout* $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k < \frac{1}{8}(2n+1)^2. \tag{3}$$

Première possibilité : On sait que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$. L'inégalité (3) se réduit donc à

$$\tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2} < \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{8}$$

c'est-à-dire $0 < 1/8$ ce qui est évidemment vérifié.

Seconde possibilité : Prouvons (3) par récurrence que n.

- Cas de base $n = 1$: (3) revient à $1 < \frac{1}{8}3^2$ qui est vérifié.

■ Supposons que (3) soit vrai pour $n=r$ et montrons qu'il le reste pour $n=r+1$. Pour le membre de gauche de (3), on a en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=1}^{r+1} k = \sum_{k=1}^{r} k + r + 1 < \tfrac{1}{8}(2r+1)^2 + r + 1 \tag{4}$$

En ce qui concerne le membre de droite de (3), on a

$$\tfrac{1}{8}\big(2(r+1)+1\big)^2 = \tfrac{1}{8}(2r+1+2)^2 = \tfrac{1}{8}(2r+1)^2 + \tfrac{1}{2}(2r+1) + 4 = \tfrac{1}{8}(2r+1)^2 + r + \tfrac{9}{2}. \tag{5}$$

En comparant (4) et (5), on se rend compte que (3) est vérifié pour $n=r+1$.

Question 7. *Calculez (en écrivant les détails nécessaires à la compréhension du déroulement de ces calculs) :*

$$\begin{aligned}
\sum_{v=-2}^{t^2} (v-3) &= \sum_{v=-2}^{t^2} v - \sum_{v=-2}^{t^2} 3 \\
&= -2 + (-1) + \sum_{v=0}^{t^2} v - (t^2+3)3 && \text{(termes } v=-2 \text{ et } v=-1 \text{ séparés)} \\
&= -3 + \tfrac{1}{2}t^2(t^2+1) - 3t^2 - 9 && \text{(formule } \textstyle\sum_{v=0}^{n} v = \tfrac{1}{2}n(n+1)) \\
&= \tfrac{1}{2}t^4 - \tfrac{5}{2}t^2 - 12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{t}\sum_{p=0}^{t} (\ell^2 - p^2) &= \sum_{\ell=1}^{t}\Big(\ell^2 + \sum_{p=1}^{t}(\ell^2-p^2)\Big) \\
&= \sum_{\ell=1}^{t} \ell^2 + \sum_{\ell=1}^{t}\sum_{p=1}^{t}(\ell^2-p^2) = \sum_{\ell=1}^{t}\ell^2 && \text{(2}^{\text{e}} \text{ somme antisymétrique)} \\
&= \tfrac{1}{6}t(t+1)(2t+1) && \text{(formule vue au cours)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{s}\sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k}(-1)^k &= \sum_{\ell=1}^{s}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^k 1^{\ell-k} \\
&= \sum_{\ell=1}^{s}(-1+1)^\ell = \sum_{\ell=1}^{s} 0^\ell = 0
\end{aligned}$$

Question 8. *Soit le polynôme $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ où $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Supposons que z_0 est un nombre complexe solution de l'équation $p(x) = \boldsymbol{i}$. Calculez la valeur de $p(\overline{z_0})$.*

$$\begin{aligned}
p(\overline{z_0}) &= a_3\overline{z_0}^3 + a_2\overline{z_0}^2 + a_1\overline{z_0} + a_0 \\
&= \overline{a_3}\,\overline{z_0^3} + \overline{a_2}\,\overline{z_0^2} + \overline{a_1}\,\overline{z_0} + \overline{a_0} && \text{(car } \overline{z_0}^n = \overline{z_0^n} \text{ et } a_i = \overline{a_i} \text{ vu que } a_i \in \mathbb{R}) \\
&= \overline{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0} && \text{(le conjugué d'une somme est la somme des conjugués)} \\
&= \overline{p(z_0)} = \bar{\boldsymbol{i}} = -\boldsymbol{i}
\end{aligned}$$

Question 9.

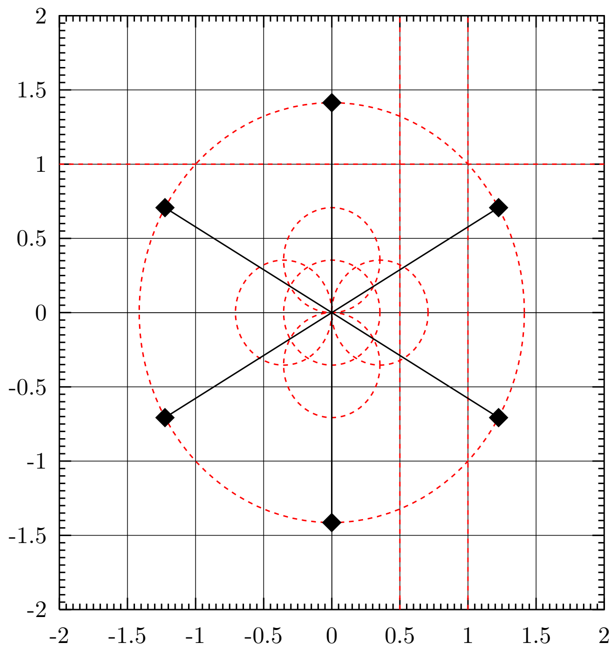
- *Donnez toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^6 = 1$.*

  Les solutions sont $z_k = \cos(k\pi/3) + \boldsymbol{i}\sin(k\pi/3)$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$, ou, explicitement, 1, $\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1, $-\frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- *En utilisant le point précédent, résolvez l'équation $z^6 = -8$. Expliquez votre démarche.*

  Si w est une solution particulière de cette équation, alors les nombres wz_k, avec $k = 1, 2, \ldots, 5$, sont toutes les solutions. $w = \boldsymbol{i}\sqrt{2}$ est une telle solution puisque $w^6 = \boldsymbol{i}^6 2^3 = (-1)^3 8 = -8$. Les solutions de $z^6 = -8$ sont donc

$$
\begin{aligned}
wz_0 &= w = \boldsymbol{i}\sqrt{2} & wz_3 &= -\boldsymbol{i}\sqrt{2} \\
wz_1 &= -\tfrac{\sqrt{6}}{2} + \boldsymbol{i}\tfrac{\sqrt{2}}{2} & wz_4 &= \tfrac{\sqrt{6}}{2} - \boldsymbol{i}\tfrac{\sqrt{2}}{2} \\
wz_2 &= -\tfrac{\sqrt{6}}{2} - \boldsymbol{i}\tfrac{\sqrt{2}}{2} & wz5 &= \tfrac{\sqrt{6}}{2} + \boldsymbol{i}\tfrac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$



- *Représentez aussi précisément que possible les solutions de l'équation $z^6 = -8$ sur le graphique ci-contre. Expliquez votre démarche.*

  Le module des solutions de $z^6 = 8$ est solution de $|z|^6 = 8$ et donc vaut $|z| = \sqrt{2}$. Les solutions se trouvent donc sur le cercle centré en 0 et de rayon $\sqrt{2}$ — qui est celui qui passe par le point $(1,1)$. Une fois la solution w tracée (à l'intersection de ce cercle et de l'axe des y), les autres solutions se trouvent par rotations d'angle $\pi/3$ — on détermine ces angles grâce aux intersections des petits cercles qui forment des triangles équilatéraux.

Question 10.

- *Prouvez que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a*

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Cela découle de l'identité $|z|^2 = \bar{z}z$ (qui est aisée : si $z = a + b\boldsymbol{i}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on a $|z|^2 = a^2 + b^2 = (a - b\boldsymbol{i})(a + b\boldsymbol{i})$).

- *Déduisez du point précédent que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$|z| = 1 \qquad ssi \qquad z \neq 0 \wedge \bar{z} = \frac{1}{z}.$$

($\Rightarrow$) Si $|z| = 1$, z ne peut être nul (sinon $|z| = 0$) et la formule précédente implique que $1/z = \bar{z}$, ou encore $\bar{z} = 1/z$.

($\Leftarrow$) En prenant le module des deux membres de $\bar{z} = 1/z$, on a $|z| = |\bar{z}| = |1/z| = 1/|z|$, c'est-à-dire $|z|^2 = 1$ ou encore $|z| = 1$.

- *Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Supposons que $|z_1| = |z_2| = 1$. Montrez que le nombre complexe $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ est égal à son conjugué.*

Calculons le conjugué de $(z_1 + z_2)/(1 + z_1 z_2)$ en se rappelant que le conjugué d'un produit (resp. d'un quotient, resp. d'une somme) est le produit (resp. le quotient, resp. la somme) des conjugués :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1}\,\overline{z_2}} &= \frac{1/z_1 + 1/z_2}{1 + 1/(z_1 z_2)} && \text{(point précédent)} \\ &= \frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2} \Big/ \frac{z_1 z_2 + 1}{z_1 z_2} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}. \end{aligned}$$

Question 11. *Soit u, v, w trois vecteurs de $\mathbb{R}^N$ tels que $u \cdot w = v \cdot w = 2$. On définit $t = au + bv$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Calculez $t \cdot w$. Expliquez votre démarche.*

$$\begin{aligned} t \cdot w &= (au + bv) \cdot w && \text{(définition de } t\text{)} \\ &= au \cdot v + bv \cdot w && \text{(bilinéarité du produit scalaire)} \\ &= 2a + 2b && \text{(hypothèses)} \end{aligned}$$

Question 12. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

- *Calculez l'inverse de A, s'il existe.*

  On utilise la technique de la matrice compagnon :

$$
\begin{array}{ccc}
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3/2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 4L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} -9 & -6 & 2 \\ 7/2 & 5/2 & -1/2 \\ -5/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -32 & -22 & 6 \\ 7 & 5 & -1 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}
\end{array}
$$

- *En utilisant le point précédent, résolvez le système*

$$
\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ -x - y + 5z = -4 \\ 2x + 7y - 3z = 2 \end{cases}
$$

  Ce système s'écrit sous forme matricielle comme :

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

  et donc possède pour solution

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -32 & -22 & 6 \\ 7 & 5 & -1 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}
$$

Question 13. *Calculez les dérivées suivantes :*

$$\begin{aligned}
\partial_x\big(e^{\sin(x^2+y)}\big) &= \partial_z(e^z)\big|_{z=\sin(x^2+y)}\,\partial_x\big(\sin(x^2+y)\big)\\
&= e^{\sin(x^2+y)}\,\partial_z(\sin z)\big|_{z=x^2+y}\,\partial_x(x^2+y)\\
&= e^{\sin(x^2+y)}\,\cos(x^2+y)\,2x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_y\Big(\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+xy+y^2}}\Big) &= \partial_z(\arcsin z)\big|_{z=1/\sqrt{x^2+xy+y^2}}\,\partial_y\Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+xy+y^2}}\Big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\Big|_{z=1/\sqrt{x^2+xy+y^2}}\,\Big(-\frac{1}{2}\,\frac{\partial_y(x^2+xy+y^2)}{(x^2+xy+y^2)^{3/2}}\Big)\\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{\sqrt{x^2+xy+y^2-1}}\,\frac{x+2y}{(x^2+xy+y^2)^{3/2}}\\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{x+2y}{(x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+xy+y^2-1}}
\end{aligned}$$

Question 14. *Pour chacune des relations suivantes, dites si elle est une fonction et, dans l'affirmative, déterminez son domaine. Justifiez vos réponses.*

- $f : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y$ *tel que* $y > 0$ *et* $y^2 + 2 = x$.

  Pour x fixé, l'équation $y^2 = x - 2$, aura une solution unique $y > 0$, à savoir $y = \sqrt{x-2}$, si $x \geqslant 2$ et aucune solution si $x < 2$. f est donc bien une fonction car à un x correspond au plus un y. Par ce qui vient d'être dit, $\operatorname{Dom} f = \{x : f(x) \text{ existe}\} = \{x : x \geqslant 2\} = [2, +\infty[$.

- $g : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y$ *tel que* $y^3 - y = x$.

  Ce n'est pas une fonction car à certains x correspond plusieurs y. Plus concrètement, pour $x = 0$, les trois valeurs $y = -1$, $y = 0$ et $y = 1$ sont solution de $y^3 - y = x$.

- $h : \mathbb{R}[X] \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : p \mapsto \int_0^1 p(x)\,dx$. *(Rappelons que* $\mathbb{R}[X]$ *est l'ensemble des polynômes en la variable* X *et que, pour* $p \in \mathbb{R}[X]$, $p(x)$ *désigne le résultat de l'évaluation de* p *en* x*.)*

  C'est une fonction car, si l'intégrale de f existe, alors celle-ci est un nombre réel bien défini. De plus, l'intégrale d'un polynôme sur $[0, 1]$ existe toujours (on peut même la calculer explicitement). Par conséquent $\operatorname{Dom} h = \mathbb{R}[X]$.

Question 15. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$ *et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable telle que* $g(1) = 0$, $g(2) = 1$, $\partial g(1) = 2$ *et* $\partial g(2) = 4$. *Calculez* $\partial(f \circ g)(1)$.

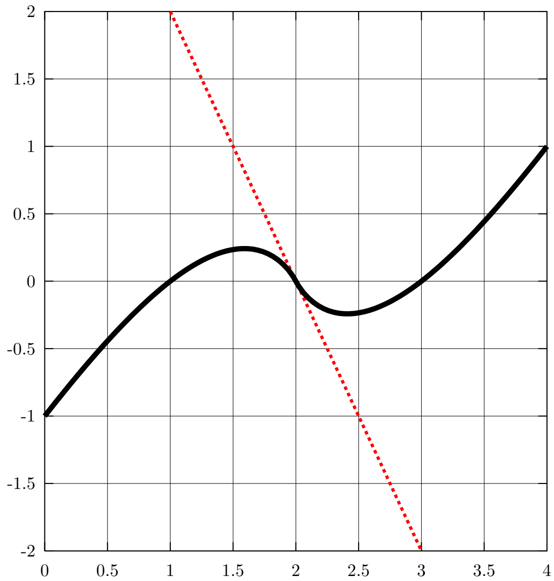
La formule de dérivation des fonctions composées dit que

$$\partial(f \circ g)(1) = \partial f(g(1))\,\partial g(1) = \partial f(0)\,\partial g(1) = (\cos 0)\,2 = 2.$$

Question 16. *Soit $f : [0,4] \to [-2,2]$ une fonction continue. On possède les informations suivantes sur f :*

- *$f(1) = 0$ et $f(4) = 1$;*
- *en $x = 2$, la droite tangente au graphe de f a pour équation $y = -2x+4$;*
- *f vérifie la propriété de symétrie : $\forall \xi \in [0,2],\ f(2+\xi) = -f(2-\xi)$;*
- *f est croissante sur $[0,1]$.*

Esquissez le graphe de f sur la figure ci-dessous. Expliquez votre démarche.



Le graphe de la fonction passe par $(1, f(1)) = (1,0)$ et $(4, f(4)) = (4,1)$. De plus, si $x \approx 0$, $f(x) \approx -2x+4$; en particulier, $f(2) = 0$. La relation $f(2+\xi) = -f(2-\xi)$ dit que la fonction est symétrique par rapport au point $(2,0)$. En particulier, pour $\xi = 1$, $f(3) = -f(1) = 0$ et pour $\xi = 2$, $1 = f(4) = -f(0)$ i.e., $f(0) = -1$. On relie alors les différents points en respectant la stricte croissance sur $[0,1]$, la tangente en $x = 2$ et la symétrie.

Cette fonction f est-elle injective ? Justifiez.

Elle ne l'est pas. En effet, $f(1) = f(2) = f(3) = 0$, ce qui contredit la définition d'injectivité (voir page 2)

Question 17. *Soit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Notons A^t la transposée de la matrice A. Montrez que A est inversible si et seulement si A^t est inversible.*

Supposons que A est inversible. En appliquant la fonction « transposition » à la relation $AA^{-1} = \mathbb{1}$, on obtient

$$(A^{-1})^t A^t = (AA^{-1})^t = \mathbb{1}^t = \mathbb{1}.$$

Ceci veut dire que A^t possède un inverse (à savoir $(A^{-1})^t$). Inversément, si A^t est inversible, le raisonnement précedent montre que $A = (A^t)^t$ est inversible.

Question 18. *Trouvez un polynôme de degré 3, $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$, vérifiant $p(1) = 1$, $p(2) = 15$, $p(3) = 51$ et $\partial_x p(-1) = 11$.*

Écrivons les contraintes en $\alpha_0, \dots, \alpha_3$:

$$\begin{aligned} p(1) &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ p(2) &= \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3 = 15 \\ p(3) &= \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 + 27\alpha_3 = 51 \\ \partial_x p(-1) &= (\alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^3)_{x=-1} = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 11 \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, cela s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 51 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Résolvons ce système par élimination Gaussienne :

$$\begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 14 \\ 0 & 2 & 8 & 26 & 50 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 22 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3/2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 5L_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 26 & 52 \end{array}\right)$$

D'où

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{52}{26} = 2 \\ \alpha_2 &= 11 - 6\alpha_3 = -1 \\ \alpha_1 &= 14 - 7\alpha_3 - 3\alpha_2 = 3 \\ \alpha_0 &= 1 - \alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1 = -3 \end{aligned}$$

et par conséquent

$$p(x) = -3 + 3x - x^2 + 2x^3.$$

(On peut vérifier qu'on n'a pas fait d'erreur grossière dans les calculs en évaluant par exemple $p(1)$...)