Mathématique Élémentaire

Examen

(3 juin 2003)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Sachant que $\sqrt{21} \notin \mathbb{Q}$, montrez que $\sqrt{3}+\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.

Question 2. Quelle est la négation de la proposition suivante :

« toutes les suédoises sont blondes et ont les yeux bleus » ?

Cochez la ou les réponses adéquates :

- ☐ Il existe une suédoise qui n'est pas blonde et qui n'a pas les yeux bleus.
- ☐ Il existe une suédoise qui n'est pas blonde ou qui n'a pas les yeux bleus.
- ☐ Aucune suédoise n'est blonde et n'a les yeux bleus.
- ☐ Aucune suédoise n'est blonde ou n'a les yeux bleus.

Mathématique Élémentaire

Examen (3 juin 2003)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Trouvez tous les nombres complexes z tels que

$$z \text{ et } z-1 \text{ aient même module.}$$

Représentez graphiquement ces nombres.

Question 4.

(a) Donnez le module et l'argument de $\left(2 \cdot \operatorname{cis}(\pi/12)\right)^3$.

(b) Donnez toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 = 1$.

(c) Des points (a) et (b), déduisez toutes les solutions de l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(1+\boldsymbol{i})$. Expliquez votre démarche.

Mathématique Élémentaire

Examen (3 juin 2003)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. La proposition $(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$ est-elle une tautologie ? Justifiez votre réponse.

Question 6. Soit z et z' deux nombres complexes de module 1 et a un réel. Posons $A := z + z' + azz' + 1$ et $B := z + z' + zz' + a$.

(a) Montrez que $B = z \cdot z' \cdot \overline{A}$;

(b) Montrez que $|A| = |B|$;

(c) Montrez que le nombre $y = \dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

Mathématique Élémentaire

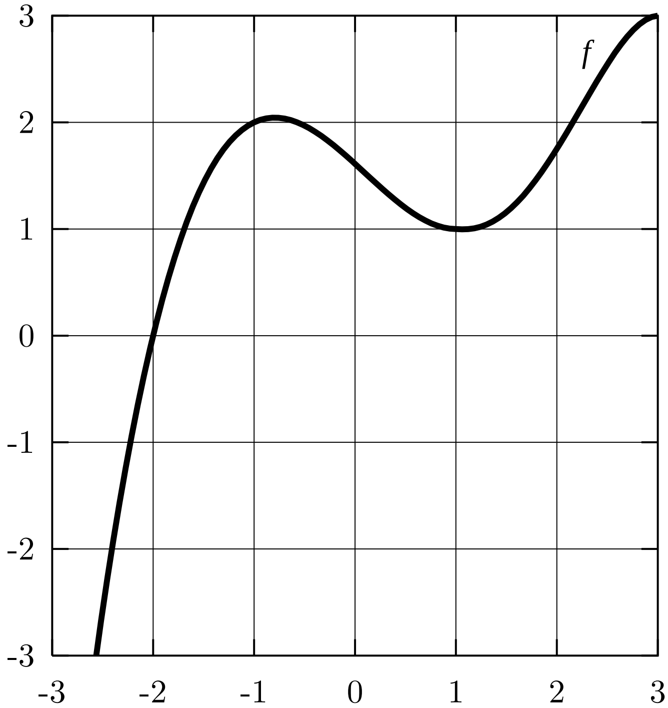
Examen (3 juin 2003)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. On considère la fonction $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$ dont le graphe est représenté ci-dessous.



(a) Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto f(x+a)$ a-t-elle une racine $\geqslant 0$?

(b) Pour quelles valeurs de $b \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto f(x)+b$ a-t-elle une racine $\geqslant 0$?

Expliquez votre démarche.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Recherchez la matrice M dont l'inverse est la matrice

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

En utilisant le point précédent, résolvez le système

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 10 \\ -y - z = -15 \\ 2x + y + 2z = -10 \end{cases}$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page, si nécessaire.

Mathématique Élémentaire

Examen (3 juin 2003)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9.

- Soit la fonction $f : \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2\}$ définie par

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 0.$$

Cette fonction est-elle injective ? surjective ? Justifiez.

- Notons $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels en la variable x. Considérons la fonction

$$g : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x] : p \mapsto \partial_x p.$$

Cette fonction est-elle injective ? Justifiez.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Calculez (en détaillant suffisamment les étapes) :

- $\displaystyle\sum_{p=-4}^{n^2}(3-p) =$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=0}^{t}(k-j)(k+j) =$

- $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{s}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^k =$

Question 11. Montrez que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3 = 2n^4-n^2.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Déterminez les vecteurs (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ qui sont à la fois orthogonaux à $(-2, 1, -5)$ et à $(0, -1, 4)$. Décrivez géométriquement vos résultats.

Question 13. Soit $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$. Notons A^t la transposée de A. Montrez que A est inversible si et seulement si A^t est inversible.

Mathématique Élémentaire

Examen (3 juin 2003)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 14. Prouvez de manière graphique et algébrique que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{si } |x| \leqslant |x+1| \text{ et } |x| \leqslant |x-1|, \text{ alors } |x| \leqslant 1/2.$$