Mathématique Élémentaire

Examen (3 juin 2003)

Correction

Question 1. *Sachant que $\sqrt{21} \notin \mathbb{Q}$, montrez que $\sqrt{3}+\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.*

Posons $x := \sqrt{3}+\sqrt{7}$ et argumentons par contradiction en supposant que $x \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire en supposant que x s'écrive comme $x = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Dès lors, $x^2 = p^2/q^2 \in \mathbb{Q}$. Par ailleurs, $x^2 = (\sqrt{3}+\sqrt{7})^2 = 10 + 2\sqrt{21}$. Par conséquent

$$\sqrt{21} = \frac{x^2-10}{2} = \frac{p^2-10q^2}{2q^2}$$

appartient à $\mathbb{Q}$ (c'est un quotient d'entiers), ce qui contredit le fait (donné dans l'énoncé) que $\sqrt{21} \notin \mathbb{Q}$.

Question 2. *Quelle est la négation de la proposition suivante :*

« toutes les suédoises sont blondes et ont les yeux bleus » ?

Cochez la ou les réponses adéquates :

- ☐ *Il existe une suédoise qui n'est pas blonde et qui n'a pas les yeux bleus.*
- ☑ *Il existe une suédoise qui n'est pas blonde ou qui n'a pas les yeux bleus.*
- ☐ *Aucune suédoise n'est blonde et n'a les yeux bleus.*
- ☐ *Aucune suédoise n'est blonde ou n'a les yeux bleus.*

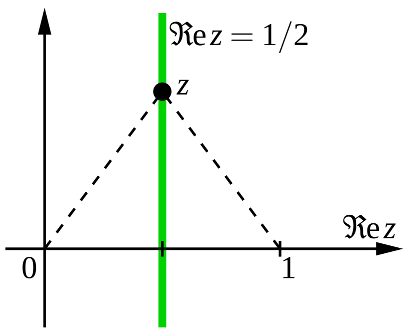
Question 3. *Trouvez tous les nombres complexes z tels que*

z et $z-1$ aient même module.

Représentez graphiquement ces nombres.

$|z|$ est la distance de z à 0 et $|z-1|$ est la distance de z à 1. On voit sur le graphique ci-contre que les z recherchés — ceux à égale distance de 0 et 1 — sont ceux de la droite $\Re e\, z = 1/2$.

Retrouvons ce résultat par calcul. Écrivons $z = a + b\boldsymbol{i}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. L'égalité $|z| = |z-1|$ est équivalente à $|z|^2 = |z-1|^2$ (vu que les deux membres $|z|$ et $|z-1|$ sont $\geqslant 0$), ou encore $a^2 + b^2 = (a-1)^2 + b^2$. Quelques manipulations algébriques élémentaires réduisent cette équation à $a = 1/2$ — ce qui est le résultat recherché.



Question 4.

(a) Donnez le module et l'argument de $\big(2\cdot \operatorname{cis}(\pi/12)\big)^3$.

$\big(2\cdot \operatorname{cis}(\pi/12)\big)^3 = 2^3 \operatorname{cis}(3\pi/12) = 8\operatorname{cis}(\pi/4)$ ce qui implique que le module est 8 et l'argument $\pi/4 \in [0,2\pi[$.

(b) Donnez toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ *de l'équation* $z^3 = 1$.

Les trois solutions sont données par la formule générale $\zeta_k := \operatorname{cis}(2k\pi/3)$, $k = 0,1,2$, ou, plus explicitement, par

$$\zeta_0 = \operatorname{cis}(0) = 1, \qquad \zeta_0 = \operatorname{cis}(2\pi/3) = -\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \zeta_0 = \operatorname{cis}(4\pi/3) = -\frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(c) Des points (a) et (b), déduisez toutes les solutions de l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(1+\boldsymbol{i})$. *Expliquez votre démarche.*

Si z_0 est une solution de $z^3 = 4\sqrt{2}(1+\boldsymbol{i})$, alors toutes les solutions sont données par $z_0\zeta_k$, $k = 0,1,2$, c'est-à-dire, explicitement par

$$z_0\zeta_0 = z_0, \qquad z_0\zeta_1 = z_0 \operatorname{cis}(2\pi/3), \qquad z_0\zeta_2 = z_0 \operatorname{cis}(4\pi/3).$$

Comme $1+\boldsymbol{i} = \sqrt{2}\operatorname{cis}(\pi/4)$, le point (a) nous dit qu'un z_0 est $z_0 = 2\operatorname{cis}(\pi/12)$. Par conséquent, les trois solutions sont

$$\begin{aligned} z_0 &= 2\operatorname{cis}(\pi/12) \\ z_0\zeta_1 &= 2\operatorname{cis}(\pi/12 + 2\pi/3) = 2\operatorname{cis}(9\pi/12) \\ z_0\zeta_2 &= 2\operatorname{cis}(\pi/12 + 4\pi/3) = 2\operatorname{cis}(17\pi/12) \end{aligned}$$

Question 5. *La proposition* $(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$ *est-elle une tautologie ? Justifiez votre réponse.*

Pour voir cela, on dresse la table de vérité de cette formule.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	$(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$
0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	1

La colonne des valeurs de vérité de la formule $(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$ ne comportant que des « 1 », celle-ci est une tautologie.

Question 6. *Soit z et z' deux nombres complexes de module 1 et a un réel. Posons $A := z + z' + azz' + 1$ et $B := z + z' + zz' + a$.*

RAPPELONS quelques règles qui seront utilisées dans les calculs ci-dessous. Le conjugué d'une somme (resp. d'un produit, resp. d'un quotient) est la somme (resp. le produit, resp. le quotient) des conjugués. Un nombre $w \in \mathbb{C}$ est réel ssi $\overline{w} = w$. Par ailleurs, $|w|^2 = \overline{w}w = |\overline{w}|^2 \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$.

(a) *Montrez que $B = z \cdot z' \cdot \overline{A}$;*

$$\begin{aligned} z \cdot z' \cdot \overline{A} &= zz'(\overline{z + z' + azz' + 1}) = zz'(\overline{z} + \overline{z'} + a\overline{z}\,\overline{z'} + 1) \\ &= |z|^2 z' + z\,|z'|^2 + a|z|^2\,|z'|^2 + zz' = z' + z + a + zz' = B \end{aligned}$$

(b) *Montrez que $|A| = |B|$;*

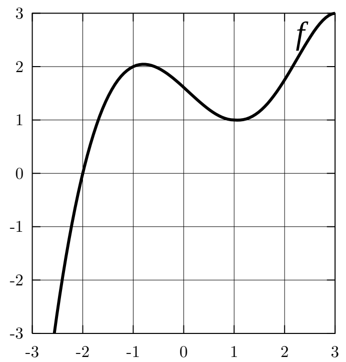
$$|B| = |zz'\overline{A}| = |z|\,|z'|\,|\overline{A}| = |\overline{A}| = |A|$$

(c) *Montrez que le nombre $y = \dfrac{z + z'}{1 + zz'}$ est réel.*

Il suffit de montrer que $\overline{y} = y$. On va utiliser le fait que $1 = |z|^2 = z\overline{z}$ et donc que $\overline{z} = 1/z$. De même $\overline{z'} = 1/z'$.

$$\overline{y} = \frac{\overline{z} + \overline{z'}}{1 + \overline{z}\,\overline{z'}} = \frac{1/z + 1/z'}{1 + \frac{1}{z}\frac{1}{z'}} = \frac{\frac{z'+z}{zz'}}{\frac{zz'+1}{zz'}} = \frac{z' + z}{zz' + 1} = y$$

Question 7. *On considère la fonction $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ dont le graphe est représenté ci-dessous.*



(a) *Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto f(x + a)$ a-t-elle une racine $\geqslant 0$?*

(b) *Pour quelles valeurs de $b \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto f(x) + b$ a-t-elle une racine $\geqslant 0$?*

Expliquez votre démarche.

(a) Le graphe de la fonction $g_a(x) = f(x + a)$ est le translaté horizontal de celui de f de a unités vers la gauche si $a \geqslant 0$ et de $|a|$ unités vers la droite si $a \leqslant 0$. Pour translater l'unique racine -2 de f dans les valeurs positives, il faut la déplacer de $\geqslant 2$ unités vers la droite, c'est-à-dire de $|a|$ unités vers la droite avec $a \leqslant -2$. Les a qui conviennent sont donc tous les $a \leqslant -2$.

REMARQUE : On peut arriver au même résultat par calcul. En effet, x est racine de g_a, i.e. $g_a(x) = 0$, si et seulement si $f(x + a) = 0$, i.e. si $x + a$ est racine de f. Or -2 est la seule racine de f. Donc la seule racine x de g_a est $x = -2 - a$. Cette racine est $\geqslant 0$ si et seulement si $-2 - a \geqslant 0$, ssi $a \leqslant -2$.

(b) Le graphe de la fonction $h_b(x) = f(x) + b$ est le translaté vertical de celui de f de b unités vers le haut. Parmi les $x \geqslant 0$, la valeur $f(x)$ la plus basse est $f(1) = 1$ et la plus haute est $f(3) = 3$. Pour avoir une racine $x \geqslant 0$, il faut donc *abaisser* le graphe de f d'au moins 1 unité et d'au plus 3 unités (remarquons que f n'est pas définie en dehors de $[-3, 3]$ et donc que h_b, qui est définie sur le même intervalle, ne peut posséder de racine en dehors de $[-3, 3]$). Donc les b qui nous intéressent vérifient $1 \leqslant -b \leqslant -3$, c'est-à-dire $b \in [-3, -1]$.

Question 8. *Recherchez la matrice M dont l'inverse est la matrice*

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

En utilisant le point précédent, résolvez le système

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 10 \\ -y - z = -15 \\ 2x + y + 2z = -10 \end{cases} \tag{1}$$

On va utiliser la méthode de la matrice compagnon pour calculer $M = (M^{-1})^{-1}$.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3/5 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 & 1/10 \\ 1/5 & -3/5 & -1/5 \\ -1/5 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - \tfrac{3}{2}L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1/10 & 7/10 & 4/10 \\ 1/5 & -3/5 & -1/5 \\ -1/5 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} = M$$

On trouve donc finalement

$$M = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & -6 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Le système (1) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \\ -10 \end{pmatrix}$$

et possède donc l'unique solution donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \\ -10 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & -6 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13{,}5 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Question 9.

- *Soit la fonction* $f : \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2\}$ *définie par*

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 0.$$

Cette fonction est-elle injective ? surjective ? Justifiez.

f n'est pas injective car $f(1) = 0 = f(3)$ alors que $1 \neq 3$. f est surjective car toutes les valeurs de l'ensemble d'arrivée sont atteintes par f :

$$0 = f(1), \qquad 1 = f(0), \qquad \text{et} \qquad 2 = f(2).$$

REMARQUE : Si A et B sont deux ensembles tels que $\operatorname{card} A > \operatorname{card} B$, il est impossible de trouver une fonction $f : A \to B$ qui soit injective. En effet, si f est injective $\operatorname{card} \operatorname{Im} f = \operatorname{card} A$ ce qui contredit $\operatorname{Im} f \subset B$ vu que cette inclusion implique $\operatorname{card} \operatorname{Im} f \leqslant \operatorname{card} B < \operatorname{card} A$.

- *Notons* $\mathbb{R}[x]$ *l'ensemble des polynômes à coefficients réels en la variable x. Considérons la fonction*

$$g : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x] : p \mapsto \partial_x p.$$

Cette fonction est-elle injective ? Justifiez.

On va montrer que f n'est pas injective en exhibant $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x]$ tels que $p_1 \neq p_2$ et $\partial_x p_1 = \partial_x p_2$. Prenons par exemple $p_1 = 1$ et $p_2 = 2$ (il y a beaucoup d'autres choix possibles). On a

$$p_1 \neq p_2 \qquad \text{et} \qquad \partial_x p_1 = 0 = \partial_x p_2.$$

Question 10. *Calculez (en détaillant suffisamment les étapes) :*

$$\begin{aligned}
\sum_{p=-4}^{n^2} (3-p) &= \sum_{q=3-n^2}^{7} q && \textit{(changement de variable } q = 3-p\textit{)}\\
&= \sum_{q=3-n^2}^{-1} q + \sum_{q=0}^{7} q = -\sum_{r=1}^{n^2-3} r + \frac{7\cdot 8}{2} && \textit{(changement de variable } r = -q\textit{)}\\
&= -\frac{(n^2-3)(n^2-2)}{2} + 28
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=0}^{s}(k-j)(k+j) &= \sum_{k=1}^{s}(k-0)(k+0) + \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}(k-j)(k+j)\\
&= \sum_{k=1}^{s} k^2 + 0 && \textit{(2}^{e}\textit{ terme antisymétrique)}\\
&= \frac{s(s+1)(2s+1)}{6} && \textit{(formule vue au cours)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{s}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^k &= \sum_{\ell=1}^{s}\Big(\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^k 1^{\ell-k}\Big) = \sum_{\ell=1}^{s}\big((-1)+1\big)^{\ell} && \textit{(binome de Newton)}\\
&= \sum_{\ell=1}^{s} 0 = 0
\end{aligned}$$

Question 11. *Montrez que, pour tout $n \geqslant 1$,*

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2. \tag{2}$$

Prouvons (2) par récurrence.
CAS DE BASE $n = 1$: Il faut vérifier que $1^3 = 2\cdot 1^4 - 1^2$ ce qui est évidemment vrai.
PAS RÉCURSIF : Supposons que (2) soit vrai pour $n = r$ et montrons qu'il le reste pour $n = r+1$. Il faut voir que

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2r-1)^3 + \big(2(r+1)-1\big)^3 \stackrel{?}{=} 2(r+1)^4 - (r+1)^2. \tag{3}$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence, le membre de gauche de (3) s'écrit

$$2r^4 - r^2 + (2r+1)^3 = 2r^4 - r^2 + 8r^3 + 12r^2 + 6r + 1 = 2r^4 + 8r^3 + 11r^2 + 6r + 1. \tag{4}$$

Quant au membre de droite de (3), le développement des puissances donne :

$$\begin{aligned}
2(r+1)^4 - (r+1)^2 &= 2\Big(r^4 + \binom{4}{3}r^3 + \binom{4}{2}r^2 + \binom{4}{1}r + 1\Big) - (r^2 + 2r + 1)\\
&= 2r^4 + 8r^3 + 22r^2 + 8r + 2 - r^2 - 2r - 1\\
&= 2r^4 + 8r^3 + 11r^2 + 6r + 1 \qquad (5)
\end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité des quantités (4) et (5).

Question 12. *Déterminez les vecteurs* (x_1, x_2, x_3) *de* $\mathbb{R}^3$ *qui sont à la fois orthogonaux à* $(-2, 1, -5)$ *et à* $(0, -1, 4)$. *Décrivez géométriquement vos résultats.*

L'orthogonalité de deux vecteurs voulant dire que leur produit scalaire est nul, l'énoncé se traduit par $(x_1, x_2, x_3) \cdot (-2, 1, -5) = 0$ et $(x_1, x_2, x_3) \cdot (0, -1, 4) = 0$, c'est-à-dire on doit résoudre le système

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ -x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

De la seconde équation on tire que $x_2 = 4x_3$ et donc, en remettant cette information dans la première, on a $-2x_1 - x_3 = 0$ ou encore $x_3 = -2x_1$. Par conséquent, les solutions (x_1, x_2, x_3) de (6) vérifient $x_3 = -2x_1$, $x_2 = -8x_1$, c'est-à-dire

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1, -8, -2), \qquad x_1 \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

GÉOMÉTRIQUEMENT (7) est l'équation paramétrique d'une droite. C'est normal car il s'agit de l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au plan engendré par les deux vecteurs $(-2, 1, -5)$ et $(0, -1, 4)$.

Question 13. *Soit* $A \in \mathbb{R}^{5\times5}$. *Notons* A^t *la transposée de* A. *Montrez que* A *est inversible si et seulement si* A^t *est inversible.*

$(\Rightarrow)$ Supposons que A soit inversible et montrons que A^t l'est aussi. En appliquant l'opération « transposition » aux identités $AA^{-1} = \mathbb{1}$ et $A^{-1}A = \mathbb{1}$, on a

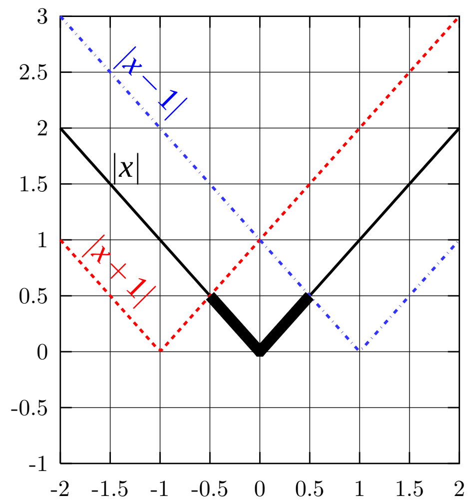
$$(A^{-1})^t A^t = (AA^{-1})^t = \mathbb{1}^t = \mathbb{1} \qquad \text{et} \qquad A^t (A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = \mathbb{1}^t = \mathbb{1}$$

ce qui montre que $(A^{-1})^t$ est l'inverse de A^t (donc que A^t est inversible).

$(\Leftarrow)$ Si A^t est inversible, alors le point précédent montre que $(A^t)^t = A$ l'est aussi.

Question 14. *Prouvez de manière graphique et algébrique que, quel que soit* $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{si } |x| \leqslant |x+1| \text{ et } |x| \leqslant |x-1|, \text{ alors } |x| \leqslant 1/2. \tag{8}$$



GRAPHIQUEMENT : On trace les graphes des fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto |x+1|$ et $x \mapsto |x-1|$. Les prémisses de l'implication (8) disent que le graphe de $x \mapsto |x|$ se trouve en dessous de ceux de $x \mapsto |x+1|$ et $x \mapsto |x-1|$. Cela arrive pour la portion mise en gras. On voit que sur cette partie, $|x|$ est en dessous de la droite horizontale $y = 1/2$, c'est-à-dire que $|x| \leqslant 1/2$.

ALGÉBRIQUEMENT : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leqslant |x+1|$ et $|x| \leqslant |x-1|$. Nous allons montrer que $|x| \leqslant 1/2$. Distinguons deux cas :

- si $x \geqslant 0$, $|x| \leqslant |x-1|$ devient $x \leqslant |x-1|$ ou encore

$$x-1 \leqslant -x \quad \text{ou} \quad x-1 \geqslant x.$$

  Comme la seconde inégalité est toujours fausse, cela revient à dire $2x \leqslant 1$ et donc $|x| = x \leqslant 1/2$.

- si $x \leqslant 0$, $|x| \leqslant |x+1|$ devient $-x \leqslant |x+1|$ ou encore

$$x+1 \leqslant x \quad \text{ou} \quad x+1 \geqslant -x.$$

  Comme la première inégalité est toujours fausse, cela donne $-2x \leqslant 1$ ou encore $|x| = -x \leqslant 1/2$.

Dans les deux cas, on arrive donc bien à dériver l'inégalité $|x| \leqslant 1/2$.