# Mathématique Élémentaire

## Examen (11 août 2003)

Nom :
Prénom :
Section :

---

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

---

Question 1. La proposition suivante est-t-elle vraie quelles que soient les valeurs de vérité de $P$ et $Q$ ?

$$\big(P \wedge (P \Rightarrow Q)\big) \Rightarrow Q.$$

Donnez une formule équivalente n'utilisant que les connecteurs logiques $\wedge$, $\vee$, $\neg$. Justifiez votre réponse.

Nom :

Prénom :

Section :

**Question 2.** Prouvez de manière graphique et algébrique que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{si } |x| \leqslant |x+2| \text{ et } |x| \leqslant |x-2|, \text{ alors } |x| \leqslant 1.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.

(a) Écrivez la définition de « $f$ est strictement croissante ».

(b) Montrez par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geqslant n$.

(c) Montrez que $f$ est injective.

(d) Donnez un exemple de fonction $f$ qui ne soit pas surjective.

| | |
|---|---|
| Nom : | |
| Prénom : | |
| Section : | |

Question 4. Calculez

- $\sum_{s=-3}^{b^2} (s+1) =$

- $\sum_{j=1}^{v} \sum_{k=0}^{v} (j^2 - k^2) =$

Question 5. Prouvez que $\sqrt[6]{3} \notin \mathbb{Q}$, sachant que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Trouvez tous les nombres complexes $z$ tels que

$$|z - \boldsymbol{i}| = |z + \boldsymbol{i}|.$$

Représentez graphiquement ces nombres.

Question 7. Soient $A, B \in \mathbb{R}$. Montrez que $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto -t^2/6 - A/t + B$ vérifie l'équation

$$\partial_t \big(t^2 \partial_t u\big)(t) + t^2 = 0.$$

Détaillez vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

**Question 8.** Soit $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$. On dit que la matrice $A$ est *antisymétrique* si $A^t = -A$ où $A^t$ désigne la transposée de $A$. Si $B$ est une matrice quelconque, montrez que $B - B^t$ est une matrice antisymétrique.

**Question 9.** Soit le système

$$\begin{cases} (\cos\theta - 1)x + \sin\theta\, y = 0 \\ \sin\theta\, x - (\cos\theta + 1)y = 0 \end{cases}$$

Existe-t-il des valeurs de $\theta$ pour lesquelles ce système admet une solution unique ? Si oui, donnez les toutes. Expliquez votre démarche.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10.

(a) Montrez, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$,

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & \text{si } x \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

(b) Soit $\theta \in \,]0, 2\pi[$. Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\boldsymbol{i} k\theta}$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10 (suite).

(c) Déduisez du point précédent la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$

(d) Que vaut $\sum_{k=0}^{n} e^{\boldsymbol{i}k\theta}$ si $\theta = 0$ ?

Question 11. Soit le polynôme $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ où $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrez que si $w \in \mathbb{C}$ est une racine du polynôme $p$, alors $\overline{w}$ l'est également. Expliquez votre démarche. En particulier, énoncez clairement les propriétés que vous utilisez.

Mathématique Élémentaire

Examen (11 août 2003)

Nom :

Prénom :

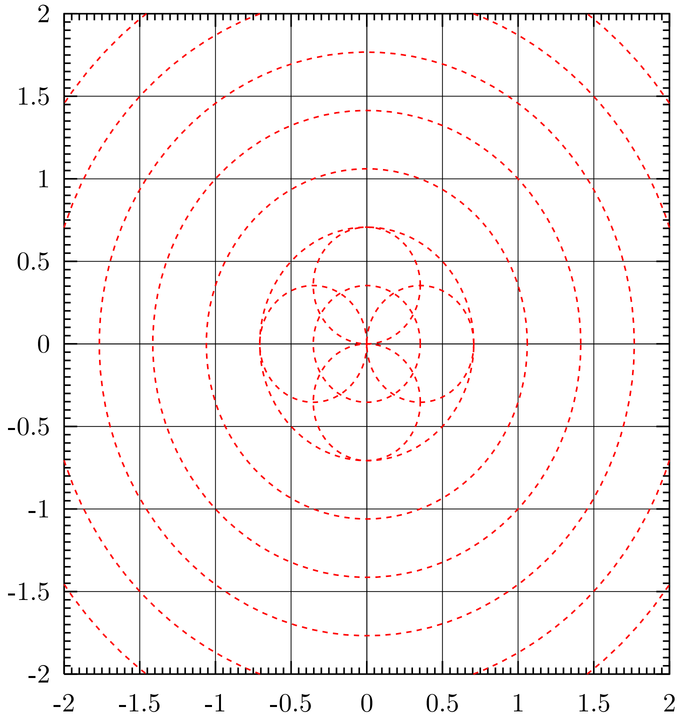
Section :

Question 12.

- Donnez toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^6 = 1$.

- En utilisant le point précédent, résolvez l'équation $z^6 = -8$. Expliquez votre démarche.

- Représentez aussi précisément que possible les solutions de l'équation $z^6 = -8$ sur le graphique ci-dessous. Expliquez votre démarche.



Nom :

Prénom :

Section :

Question 13. On considère la courbe $\Gamma$ paramétrée par la fonction

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2 - t, t)$$

c'est-à-dire $\Gamma = \operatorname{Im} \gamma$. Trouvez le(s) point(s) $t \in \mathbb{R}$ tel(s) que la tangente à $\Gamma$ en $\gamma(t)$ passe par le point $(-1, 0)$. Représentez graphiquement $\Gamma$ et les tangentes aux points trouvés.

Nom : 

Prénom : 

Section : 

Question 14. En utilisant la méthode de la matrice inverse, résolvez le système

$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 3x+4y+2z=1 \\ x+5z=-4 \end{cases}$$