Test Introductif (Math. Élém. & Informatique)

Nom : ______________
Prénom : ______________
Section : ______

Test n° 1 (16 septembre 2002)

Avant d'aller plus loin, inscrivez en lettres majuscules votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

De manière à pouvoir orienter au mieux les cours par la suite, pourriez-vous nous dire, durant les deux dernières années d'humanité :

- combien d'heures de mathématique par semaine vous avez suivies :
- dans quelle école :
- avec quel professeur :
- si vous avez vu les nombres complexes : oui / non ;
- si vous avez vu le calcul matriciel : oui / non.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !
- La durée de ce test ne dépassera pas 90 minutes.

Question 1. Écrivez les expressions suivantes sous forme d'une fraction :

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{x} =$
- $\frac{a}{y} \cdot \frac{x}{b} =$

Question 2. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et soit deux points A, B sur $\mathscr{C}$ de telle sorte que AOB ne soient pas alignés. Justifiez l'affirmation suivante : « le triangle AOB est *isocèle* ».

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Trouvez tous les nombres réels x qui satisfont l'équation suivante :

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{x^2-3x+1}{x}$$

Justifiez toutes les étapes de vos calculs.

Test Introductif (Math. Élém. & Informatique)

Test n° 1 (16 septembre 2002)

Nom :

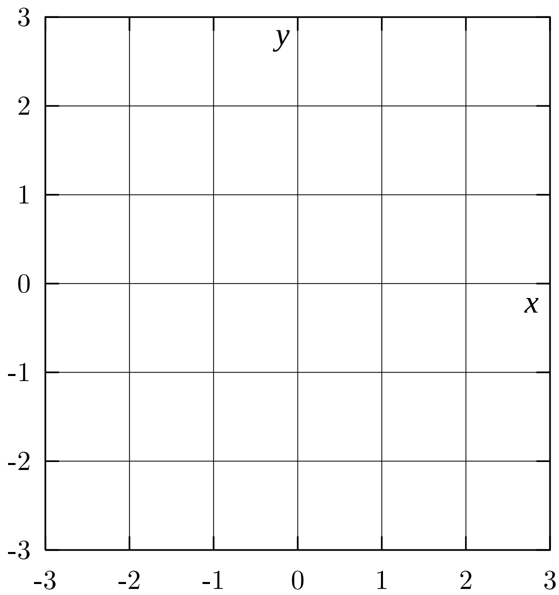
Prénom :

Section :

Question 4. Dans le plan cartésien muni d'un repère orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation

$$\mathscr{C} \equiv x + y + 1 = 0.$$

(a) Sur le graphique ci-dessous, tracez cette courbe $\mathscr{C}$.



(b) Parmi les points suivants, quels sont ceux qui appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$. Justifiez vos réponses.

- $(0,0)$
- $(2,-3)$
- $(-725,721)$
- $(5\pi - 4, 3 - 5\pi)$

(c) Cette courbe a-t-elle des points d'intersection avec l'axe des x ? Si oui, donnez les tous (en expliquant). Si non, donnez un argument qui justifie cette non-intersection.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Considérons une suite de cinquante nombres numérotés de 1 à 50. Ces nombres sont notés a_i avec i prenant des valeurs comprises entre 1 et 50.

Un *pic* est défini comme un élément plus grand que les deux éléments qui l'entourent ($a_{i-1} < a_i$ et $a_i > a_{i+1}$). On souhaiterait savoir si cette suite de 50 nombres comporte un pic et un seul.

On vous demande d'expliquer en français comment effectuer ce test. La personne à laquelle vous expliquez est censée être capable de réaliser les opérations arithmétiques élémentaires ($+$, $-$, $\times$, $\div$) ainsi que des tests basés sur des comparaisons.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Considérons la famille de fonctions

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f_a(x) = e^{ax}$$

où $a \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de a la fonction f_a est-elle croissante ? Justifiez.

Question 7. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *dérivable en un point* $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe.}$$

En utilisant cette définition, montrez que la fonction $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$. Justifiez en détail.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Montrez que l'affirmation suivante est vraie :

« Quel que soit le réel x, on peut trouver un réel y tel que $y > x$. »

Détaillez votre raisonnement.

Montrez que l'affirmation suivante est fausse :

« Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x \cdot y = 1$. »

Détaillez votre raisonnement.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies (a et b sont des nombres réels) :

- ☐ $\sqrt{a^2} = a$
- ☐ $a^2 \leqslant |a|^2$
- ☐ si $a \leqslant b$, alors $a^2 \leqslant b^2$
- ☐ si $a^2 \leqslant b^2$, alors $a \leqslant b$
- ☐ $|a+b| \leqslant |a| + |b|$
- ☐ $\dfrac{|a|}{a} = 1$
- ☐ $|a| \leqslant b$ si et seulement si $-b \leqslant a$ et $a \leqslant b$
- ☐ $|\sin a| \leqslant 1$
- ☐ $1/a \leqslant 1$
- ☐ si $a \in]0,1]$, alors $1/a \leqslant 1$