Test Introductif (Math. Élém. & Informatique)

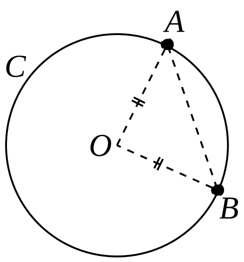
Test n° 1 (16 septembre 2002) Correction

Question 1. *Écrivez les expressions suivantes sous forme d'une fraction :*

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{x} = \frac{ax+bc}{bx}$

- $\frac{a}{y} \cdot \frac{x}{b} = \frac{ax}{yb}$

Question 2. *Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et soit deux points A, B sur $\mathscr{C}$ de telle sorte que AOB ne soient pas alignés. Justifiez l'affirmation suivante : « le triangle AOB est* isocèle *».*



RAPPEL : Par définition, un triangle isocèle est un triangle dont deux côtés ont même longueur (*iso* : même, *skelos* : jambes).

Si A et B sont sur le cercle $\mathscr{C}$, leur distance au centre O est la même (c'est le rayon du cercle). Ainsi, les côtés OA et OB sont de même longueur et le triangle est bien isocèle.

Question 3. *Trouvez tous les nombres réels x qui satisfont l'équation suivante :*

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{x^2-3x+1}{x}$$

Justifiez toutes les étapes de vos calculs.

Pour que les dénominateurs soient non nuls, il faut exclure les deux points $x = 0$ et $x = 1$. Résolvons maintenant l'équation.

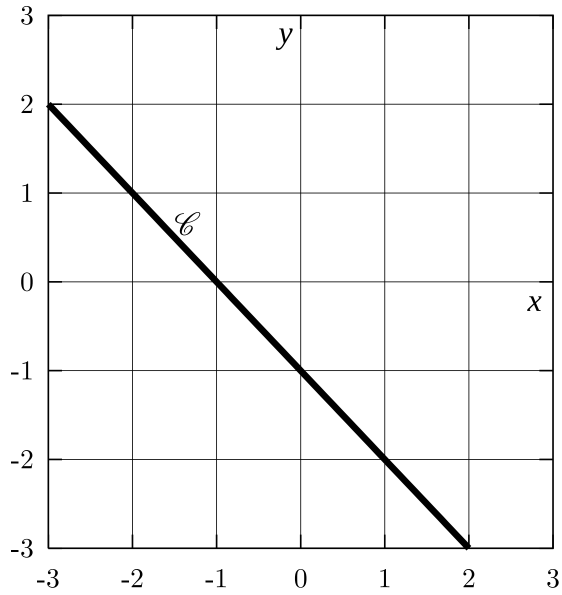
$$\begin{aligned}
& \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{x^2-3x+1}{x} & \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x(x^2-3x+2)-(x-1)(x^2-3x+1)}{x(x-1)} = 0 & \text{(mise au même dénominateur)} \\
\Leftrightarrow \quad & x(x^2-3x+2)-(x-1)(x^2-3x+1) = 0 & \text{(simplification)} \\
\Leftrightarrow \quad & x^3-3x^2+2x-x^3+3x^2-x+x^2-3x+1 = 0 & \text{(distribution)} \\
\Leftrightarrow \quad & x^2-2x+1 = 0 & \text{(simplification)} \\
\Leftrightarrow \quad & (x-1)^2 = 0 & (1)
\end{aligned}$$

Les racines de l'équation (1) sont doubles et valent 1. Cette solution est à rejeter selon nos hypothèses initiales.

Question 4. *Dans le plan cartésien muni d'un repère orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation*

$$\mathscr{C} \equiv x+y+1=0.$$

(a) *Sur le graphique ci-dessous, tracez cette courbe $\mathscr{C}$.*



(b) *Parmi les points suivants, quels sont ceux qui appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$. Justifiez vos réponses.*

Pour savoir si un point (x_0, y_0) appartient à $\mathscr{C}$, il suffit de remplacer x par x_0, y par y_0 et de tester l'égalité.

- $(0,0)$
  Non car $0+0+1 \neq 0$.
- $(2,-3)$
  Oui car $2+(-3)+1=0$.
- $(-725,721)$
  Non car $-725+721+1=-3 \neq 0$.
- $(5\pi-4, 3-5\pi)$
  Oui car $5\pi-4+3-5\pi+1=0$.

(c) *Cette courbe a-t-elle des points d'intersection avec l'axe des x ? Si oui, donnez les tous (en expliquant). Si non, donnez un argument qui justifie cette non-intersection.*

Un point est situé sur l'axe des x est de la forme $(r,0)$ pour un certain $r \in \mathbb{R}$. Donc cette courbe a des points d'intersection avec l'axe des x. En effet, si on pose $y=0$ dans l'équation $\mathscr{C}$ ($y=0$ est l'équation de l'axe des x), on obtient $x=-1$. On a donc obtenu un unique point d'intersection qui est $(-1,0)$.

Question 5. *Considérons une suite de cinquante nombres numérotés de* 1 *à* 50. *Ces nombres sont notés a_i avec i prenant des valeurs comprises entre* 1 *et* 50.

Un pic *est défini comme un élément plus grand que les deux éléments qui l'entourent ($a_{i-1} < a_i$ et $a_i > a_{i+1}$). On souhaiterait savoir si cette suite de 50 nombres comporte un pic et un seul.*

On vous demande d'expliquer en français comment effectuer ce test. La personne à laquelle vous expliquez est censée être capable de réaliser les opérations arithmétiques élémentaires ($+$, $-$, $\times$, $\div$) ainsi que des tests basés sur des comparaisons.

On définit d'abord un compteur qu'on nomme `npic` initialisé à 0. Ce compteur sera incrémenté de 1 chaque fois qu'on décèle un pic grâce à la procédure qu'on va définir ci-après. On initialise un compteur `i` à 2. On va effectuer le test suivant tant que `i` $\leqslant 49$:

> Si $a_{\mathtt{i}-1} < a_{\mathtt{i}}$ et $a_{\mathtt{i}+1} < a_{\mathtt{i}}$ alors on augmente la valeur du compteur `npic` de 1, sinon on ne fait rien. Dans les deux cas, on augmente la valeur du compteur `i` de 1.

On regarde la valeur qu'on obtient pour `npic` à la fin de la procédure. Si `npic` vaut 1 alors il y a un et un seul pic.

Question 6. *Considérons la famille de fonctions*

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$$

où $a \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de a la fonction f_a est-elle croissante ? Justifiez.

■ Premier argument : Il suffit de regarder les valeurs $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la dérivée de $f_a(x)$ est positive quel que soit x. On sait que $f_a'(x) = a\mathrm{e}^{ax}$. Puisque l'exponentielle de ax est positive quelles que soient les valeurs de a, la fonction $f_a'(x)$ est positive quand a est positif et, il en sera de même pour la croissance de la fonction $f_a(x)$.

■ Deuxième argument : Par définition de fonction croissante, il faut s'assurer que si $x_1 \leqslant x_2$ alors $\mathrm{e}^{ax_1} \leqslant \mathrm{e}^{ax_2}$ quelque soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Soit $x_1 \leqslant x_2$. Discutons trois cas :

- $a > 0$. Dès lors, $ax_1 \leqslant ax_2$ et par la croissance de l'exponentielle de x, on obtient $\mathrm{e}^{ax_1} \leqslant \mathrm{e}^{ax_2}$. La fonction $f_a(x)$ est donc croissante.
- $a = 0$. $f_a(x) = \mathrm{e}^0 = 1$ donne une fonction constante et donc croissante.
- $a < 0$. On obtient $ax_1 \geqslant ax_2$ et par la croissance de l'exponentielle de x, on déduit $\mathrm{e}^{ax_1} \geqslant \mathrm{e}^{ax_2}$. La fonction $f_a(x)$ est décroissante.

On conclut donc la croissance pour $a \geqslant 0$.

Question 7. *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est* dérivable en un point $a \in \mathbb{R}$ *si et seulement si*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \textit{ existe.}$$

En utilisant cette définition, montrez que la fonction $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$. Justifiez en détail.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculons $\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$. Puisque $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$, on a

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a \in \mathbb{R}$$

.

Question 8. *Montrez que l'affirmation suivante est vraie :*

> *« Quel que soit le réel x, on peut trouver un réel y tel que $y > x$. »*

Détaillez votre raisonnement.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x + 1 \in \mathbb{R}$ et $x + 1 > x$. Notre affirmation est ainsi satisfaite : il suffit de prendre $y = x + 1$.

Question 8 (suite). *Montrez que l'affirmation suivante est fausse :*

> *« Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x \cdot y = 1$. »*

Détaillez votre raisonnement.

Cette affirmation est fausse. En effet, prenons $x = 0$. Dès lors, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $xy = 0 \cdot y = 0 \neq 1$. Nous avons donc bien contredit l'affirmation.

Question 9. *Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies (a et b sont des nombres réels) :*

☐ $\sqrt{a^2} = a$

Il suffit de prendre $a = -1$ ce qui donne $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$. C'est vrai uniquement si $a \geqslant 0$. De manière générale, $\sqrt{a^2} = |a|$.

☑ $a^2 \leqslant |a|^2$

En fait on a même $a^2 = |a|^2$.

☐ *si* $a \leqslant b$*, alors* $a^2 \leqslant b^2$

Il suffit de prendre $a := -2 \leqslant b := -1$ pour contredire cette affirmation car $a^2 = 4 \nleqslant b^2 = 1$. Si $a \geqslant 0$ (et donc $b \geqslant 0$ aussi), c'est vrai.

☐ *si* $a^2 \leqslant b^2$*, alors* $a \leqslant b$

Il suffit de considérer $a := 1$ et $b := -1$. En effet, on a $a^2 = 1 \leqslant b^2 = 1$ bien que $a \nleqslant b$. Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, cette implication est vraie. De manière générale, on peut seulement dire que $a^2 \leqslant b^2 \Rightarrow |a| \leqslant |b|$

☑ $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

Il y a plusieurs manières de prouver cette inégalité. On peut par exemple utiliser le fait que, puisque les deux membres sont positifs, elle est équivalente à $|a+b|^2 \leqslant (|a| + |b|)^2$. Comme on l'a remarqué ci-dessus, $|c|^2 = c^2$, et donc l'inégalité devient

$$(a+b)^2 \leqslant (|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|a|\,|b| + |b|^2 = a^2 + 2|a|\,|b| + b^2$$

En développant $(a+b)^2$ et en simplifiant, on obtient $ab \leqslant |a|\,|b|$. Cette dernière inégalité est vraie car $|a|\,|b| = |ab|$ et, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant |x|$.

REMARQUE : Cette inégalité est fondamentale pour le cours d'Analyse où elle sera utilisée abondamment.

☐ $\dfrac{|a|}{a} = 1$

Cette égalité est mise en défaut par $a := -1$. Elle est vraie si et seulement si $a > 0$.

☑ $|a| \leqslant b$ *si et seulement si* $-b \leqslant a$ *et* $a \leqslant b$

$\Rightarrow$) Supposons que $|a| \leqslant b$. Commençons par remarquer que cela implique $b \geqslant 0$. Distinguons deux cas :

- Si $a \geqslant 0$, alors $|a| = a$ et l'hypothèse devient $a \leqslant b$. Dès lors $-b \leqslant 0 \leqslant a \leqslant b$ ce qui montre la thèse.
- Si $a \leqslant 0$, alors $|a| = -a$ et l'hypothèse devient $-a \leqslant b$ ou encore $a \geqslant -b$. Dès lors $-b \leqslant a \leqslant 0 \leqslant b$ ce qui prouve la thèse dans ce cas également.

$\Leftarrow$) Distinguons de nouveau deux cas.

- Si $a \geqslant 0$, alors $|a| = a$ qui sera $\leqslant b$ en vertu de l'hypothèse $a \leqslant b$.
- Si $a \leqslant 0$, alors $|a| = -a$ qui sera $\leqslant b$ en vertu de l'hypothèse $-b \leqslant a$.

☑ $|\sin a| \leqslant 1$

C'est une conséquence de la définition que vous avez vue (géométrique en général) du sinus.

☐ $1/a \leqslant 1$

Ça ne marche déjà pas pour $a = 1/2$! Il faut bien comprendre que a est un réel et donc pas nécessairement un entier ! Vous voyez donc qu'essayer avec quelques exemples (mal choisis) tels que $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$,... peut donc vous induire en erreur !

☐ *si* $a \in]0,1]$, *alors* $1/a \leqslant 1$

Même contre-exemple que ci-dessus. C'est en fait le « contraire » qui est vrai : $a \in]0,1] \Rightarrow 1/a \geqslant 1$