Mathématique Élémentaire

Correction

Test n$^\circ$ 2 (23 septembre 2002)

Question 1. *Calculez* $\left(1+\boldsymbol{i}\frac{3}{2}\right)^4$.

$$\begin{aligned}
\left(1+\boldsymbol{i}\frac{3}{2}\right)^4 &= \left(\left(1+\boldsymbol{i}\frac{3}{2}\right)^2\right)^2 && \text{(règle sur les exposants)}\\
&= \left(1+3\boldsymbol{i}-\frac{9}{4}\right)^2 && \text{(car } (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2\text{)}\\
&= \left(-\frac{5}{4}+3\boldsymbol{i}\right)^2 && \text{(addition dans } \mathbb{C}\text{)}\\
&= \frac{25}{16}-\frac{15}{2}\boldsymbol{i}-9 && \text{(car } (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2\text{)}\\
&= -\frac{119}{16}-\frac{15}{2}\boldsymbol{i} && \text{(addition dans } \mathbb{C}\text{)}\\
&= -\left(\frac{119}{16}+\frac{15}{2}\boldsymbol{i}\right) && \text{(définition de l'opposé dans } \mathbb{C}\text{)}
\end{aligned}$$

Question 2.

(a) *Prouvez que, pour tout* $z, z' \in \mathbb{C}$, *on a*

$$|zz'| = |z|\,|z'|.$$

(b) *En utilisant ce résultat, prouvez que, si* $z \neq 0$, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.

■ Calculons chaque membre de l'égalité à vérifier et on aura terminé. Posons $z = a+bi$ et $z' = c+di$. Le premier membre devient :

$$\begin{aligned}
|zz'| &= \big|(a+bi).(c+di)\big|\\
&= \big|(ac-bd)+i(ad+bc)\big| && \text{(définition de la multiplication dans } \mathbb{C}\text{)}\\
&= \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} && \text{(définition de } |\cdot|\text{)}
\end{aligned}$$

Le second membre devient (par définition de $|\cdot|$) :

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)} \qquad \text{(règle de } \sqrt{\cdot} \text{ dans } \mathbb{R}^{\geqslant 0}\text{)}$$

Il reste à vérifier l'égalité des deux radicaux, c'est-à-dire $(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$. Le premier membre est égal à $a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$. Le second est égal à $a^2c^2-2acbd+b^2d^2+a^2d^2+2adbc+b^2c^2$. Après l'utilisation des règles de calcul sur les réels, on constate l'égalité.

- On a $zz^{-1} = 1$. Donc $|zz^{-1}| = |1| = 1$ (définition de $|\cdot|$). En appliquant le premier point à $|zz^{-1}|$, on obtient :
$$|zz^{-1}| = |z|\,|z^{-1}| = 1$$
Donc
$$|z|\,|z^{-1}| = 1$$
ou encore
$$|z|^{-1} = |z^{-1}|$$

Question 3. *Prouvez, à l'aide des tables de vérité, que, sous les hypothèses $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$, on a $A \Rightarrow C$. Justifiez votre démarche.*

Cela revient à montrer que
$$\big[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$
est une *tautologie*. C'est bien le cas puisque la dernière colonne du tableau de vérité suivant ne contient que des 1.

A	B	C	$\overbrace{A \Rightarrow B}^{P}$	$\overbrace{B \Rightarrow C}^{Q}$	$P \wedge Q$	$\overbrace{A \Rightarrow C}^{R}$	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Question 4. *Soient les ensembles :*

$A := \{D : D$ *droite dont une équation cartésienne est* $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ *pour certains* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$
$B := \{D : D$ *droite dont une équation cartésienne est* $y = ax + b$ *pour certains* $a, b \in \mathbb{R}\}$

Rappelons qu'un ensemble X est contenu dans un ensemble Y si et seulement si tout élément de X appartient à Y.

- Montrons que B est contenu dans A. Soit $D \in B$, c'est-à-dire une droite dont une équation est $y = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Cette équation peut s'écrire $ax - y + b = 0$. Elle est de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ avec $\alpha = a, \beta = -1, \gamma = b$ ($(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$).

  Ainsi D possède une équation du type $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Par conséquent, $D \in A$.

- Montrons que A n'est *pas* contenu dans B. Pour cela, il faut exhiber une droite D appartenant à A mais pas à B. Prenons pour D la droite (verticale) d'équation $x = 0$. Celle-ci appartient bien à A car $x = 0$ peut s'écrire sous la forme $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ avec $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$. Reste à voir que $D \notin B$. Supposons au contraire $D \in B$, càd $D \equiv y = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. De $(0, 0) \in D$ et $(0, 1) \in D$, on déduit respectivement que $0 = a \cdot 0 + b$ et $1 = a \cdot 0 + b$. Donc $0 = b = 1$ ce qui est une contradiction. En conclusion, $D \notin B$.

Question 5. *Soient les propositions P, Q, R définies par*

$P :=$ *les deux droites d'équations* $x+y+1=0$ *et* $x+y-1=0$ *ont (au moins) un point d'intersection.*

$Q :=$ *tout nombre complexe non-nul possède un inverse.*

$R :=$ *l'implication* $P \Rightarrow Q$ *est vraie.*

Quelle est la valeur de vérité de

$$(P \vee Q) \wedge R \text{ ?}$$

Détaillez et justifiez votre démarche.

P est fausse car les deux équations données sont celles de deux droites parallèles.
Q est vraie (propriété vue au cours).
R est vraie car on a

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	1	1

Donc, on a :

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge R$
0	1	1	1	1

Ainsi la valeur de vérité de $(P \vee Q) \wedge R$ est 1.

Question 6. *Rappelons que deux nombres complexes $a + \boldsymbol{i}b$ et $c + \boldsymbol{i}d$ sont égaux si et seulement si $a = c$ et $b = d$. Complétez la phrase suivante :*

Deux nombres complexes $a + \boldsymbol{i}b$ et $c + \boldsymbol{i}d$ sont distincts si et seulement si

$$a \neq c \vee b \neq d$$

(C'est la négation de $a = c$ et $b = d$.)

Question 7. *L'énoncé suivant est-il vérifié :*

$$\textit{Pour tout } z \in \mathbb{C},\ z^{-1} = |z^{-1}| \cdot \overline{z}$$

Voici deux arguments possibles qui montrent que cette formule est fausse (un des deux suffit) :

- Cet énoncé est faux car z^{-1} n'existe pas si $z = 0$.
- Cet énoncé est faux car quand z^{-1} existe, on a vu (au cours) $z^{-1} = |z^{-2}| \cdot \overline{z}$. Et donc, si l'énoncé était vrai, on aurait $|z^{-2}| \cdot \overline{z}$. Et puisque si $z \neq 0$, on a $\overline{z} = 0$, on obtiendrait, en multipliant chaque membre par $\overline{z}^{-1}$, $|z^{-2}| = |z^{-1}|$. Ce qui n'est vrai que ssi $\overline{z} = 1$ (clairement faux, par exemple, si $z = 2$).