

Mathématique Élémentaire

Test n° 3

(30 septembre 2002)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Prouvez que l'affirmation suivante est vraie :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^N, \quad u \cdot v = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2).$$

Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (30 septembre 2002)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 2. Soit x un réel. Prouvez que, si $x \notin \mathbb{Q}$, alors $\frac{3}{7}x \notin \mathbb{Q}$.

Question 3. La formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \leq 2 \Rightarrow |x+2| \leq 4$$

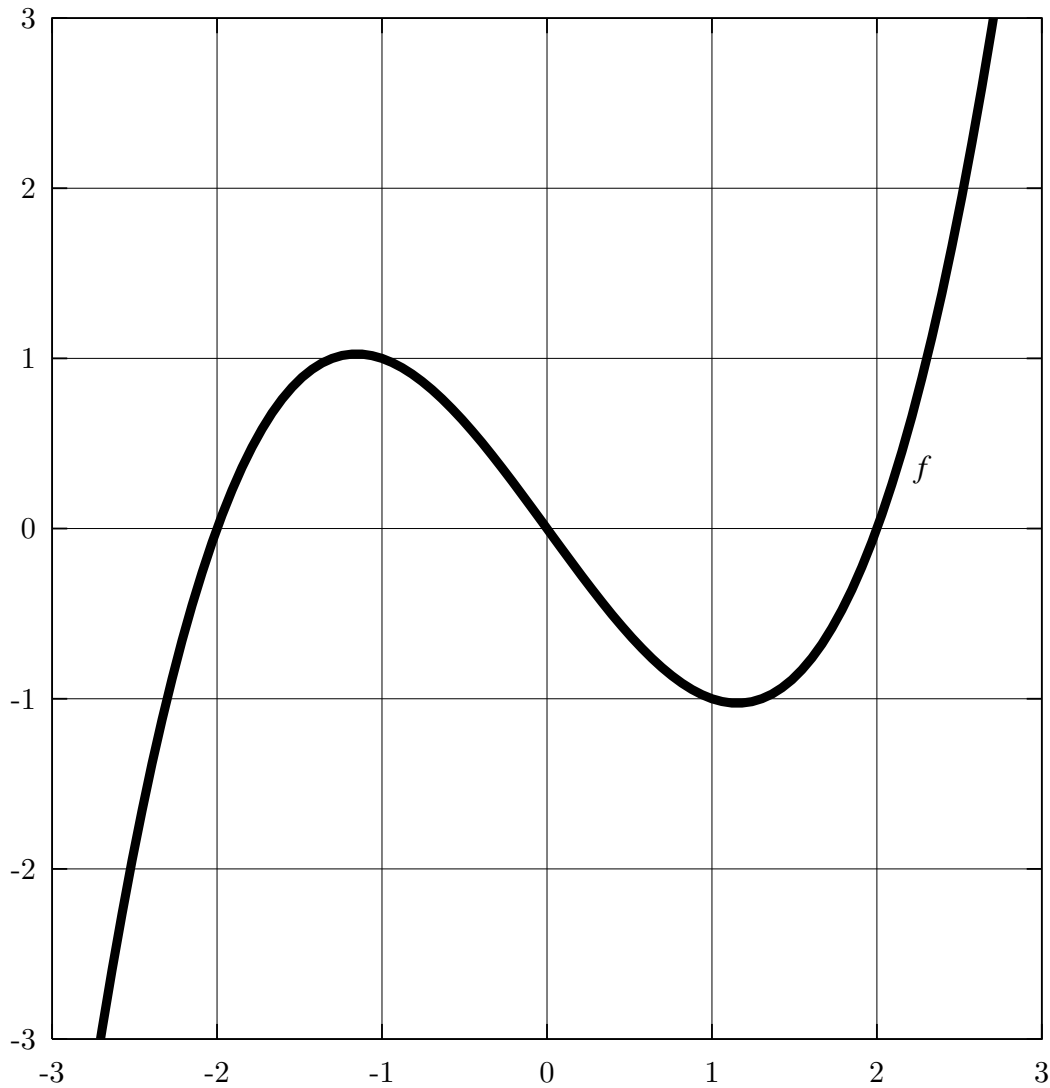
est-elle vraie ? Justifiez votre réponse par une preuve ou un contre-exemple.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous. Sur cette même figure, tracez les graphes des fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x - 1), \quad h(x) = |f(x)|$$

Expliquez brièvement votre démarche.



Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5. Pour chaque proposition suivante, cochez la case adéquate qui la précède. Justifiez brièvement vos réponses.

Vrai : Faux : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, |z \cdot |z|^{-1}| = 1.$

Vrai : Faux : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z| + |z'| = |z + z'|.$

Vrai : Faux : $\forall z \in \mathbb{C} (z = |z| \text{ ssi } z \in \mathbb{R}).$

Vrai : Faux : $\forall z \in \mathbb{C} (z = \bar{z} \text{ ssi } z \in \mathbb{R}).$

Vrai : Faux : $\exists z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \left(\text{Arg}(z) \neq \text{Arg}\left(\frac{z}{|z|}\right) \right).$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6. Soient D et D' deux droites du plan d'équations respectives

$$D \equiv ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad D' \equiv a'x + b'y + c' = 0.$$

- (a) Sous quelle(s) condition(s) sur a, b, c (resp. a', b', c') la pente de la droite D (resp. D') est-elle définie ? Que vaut alors cette pente ?
- (b) Sous les conditions trouvées en (a), prouvez à l'aide de la notion de produit scalaire que les droites D et D' sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs pentes vaut -1 .

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 7. Prouvez par récurrence que

$$\forall n \geq 1, \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 8. Soient D et D' les droites du plan d'équations paramétriques

$$D \equiv (x, y) = (0, 2) + \lambda(1, -3), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$D' \equiv (x, y) = \left(\frac{2}{3}, 0\right) + \mu(-3, 9), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

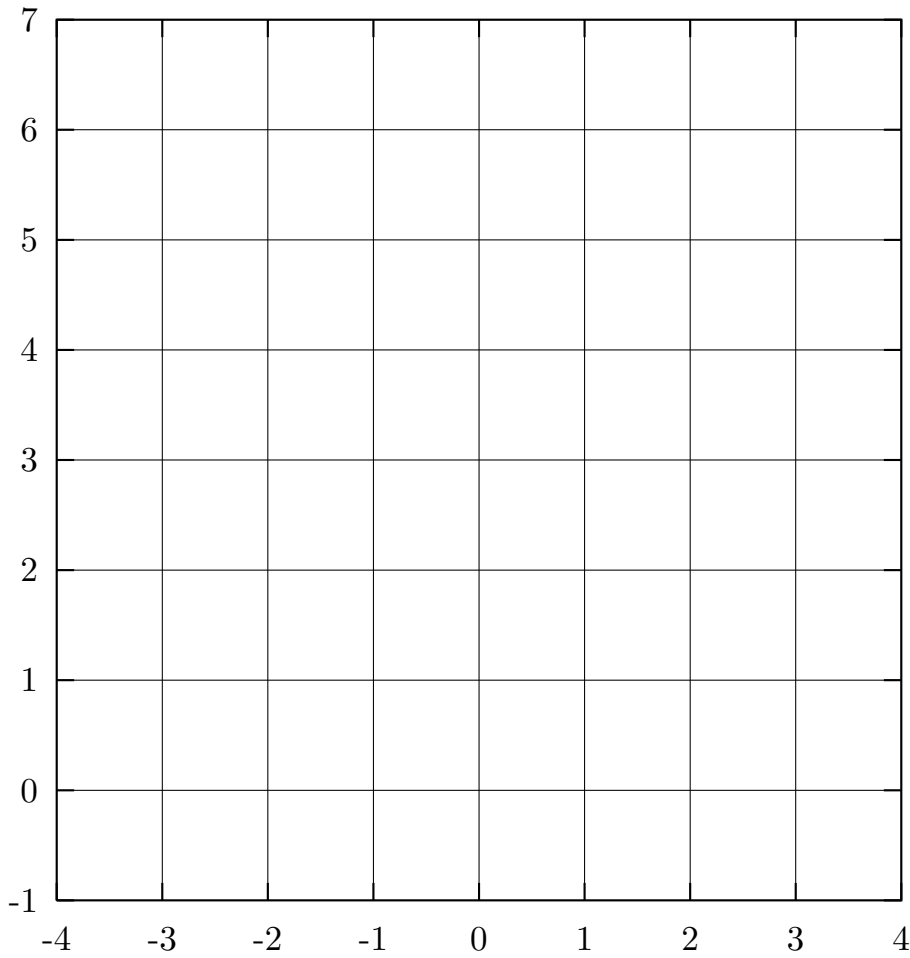
Ces deux droites sont-elles confondues ? Justifiez en détail.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9. Déterminez de manière graphique et algébrique l'ensemble des réels x tels que

$$|x + 2| \leq |x|$$

Justifiez vos calculs.



Informatique

Test n° 3 (30 septembre 2002)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 10. Soit le programme suivant :

```
int main()
{
    int a, b, m, r, t, u ;
    float x1, y2 ;
    a = 5 ;
    b = 9 ;
    y2 = 7.5 ;
    if (a <= 5 && b > 9 ) {
        m = 9 ;
    }
    else {
        m = 10 ;
    }
    if (a >= 5 || b < 9) {
        r = 15 ;
    }
    else {
        r = 20 ;
    }
    a = a + 2 * b ;
    b = a - b ;
    a = a - b ;
    x1 = a * a ;
    t = y2 * y2 ;
    u = b % 4 ;
    printf ("%d %d %d %d %d %d %f %f ", a, b, m, r, t, u, x1, y2);
}
```

Qu'imprimera-t-il ?

Informatique

Test n° 3 (30 septembre 2002)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 10 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.