Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 3 (30 septembre 2002) **Correction**

Question 1. *Prouvez que l'affirmation suivante est vraie :*

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^N, \quad u \cdot v = \tfrac{1}{4}\big(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\big).$$

Soit $u, v \in \mathbb{R}^N$. Montrons que $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4u \cdot v$. Nous savons que $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ \|x\|^2 = x \cdot x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 &= (u+v)\cdot(u+v) - (u-v)\cdot(u-v) \\
&= u\cdot u + u\cdot v + v\cdot u + v\cdot v - u\cdot u + u\cdot v + v\cdot u - v\cdot v \\
&= 2u\cdot v + 2v\cdot u \\
&= 4u\cdot v \qquad \text{(car le produit scalaire est commutatif).}
\end{aligned}$$

Question 2. *Soit x un réel. Prouvez que, si $x \notin \mathbb{Q}$, alors $\dfrac{3}{7}x \notin \mathbb{Q}$.*

On nous demande de prouver que $\forall x \in \mathbb{R},\ x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow (3/7)x \notin \mathbb{Q}$. Supposons que cette proposition soit fausse. Alors il existerait un $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \notin \mathbb{Q}$ et $(3/7)x \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire (par définition de $\mathbb{Q}$), il existerait $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tels que $\frac{3}{7}x = \frac{a}{b}$. Mais alors x serait égal à $\frac{7}{3}\cdot\frac{a}{b}$, qui est un élément de $\mathbb{Q}$ (puisque le produit de deux rationnels est encore un rationnel). Ceci ($x = (7a)/(3b)$) contredit l'hypothèse $x \notin \mathbb{Q}$, ce qui montre que la proposition énoncée à la question 2 est vérifiée.

Question 3. *La formule*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \leqslant 2 \Rightarrow |x+2| \leqslant 4$$

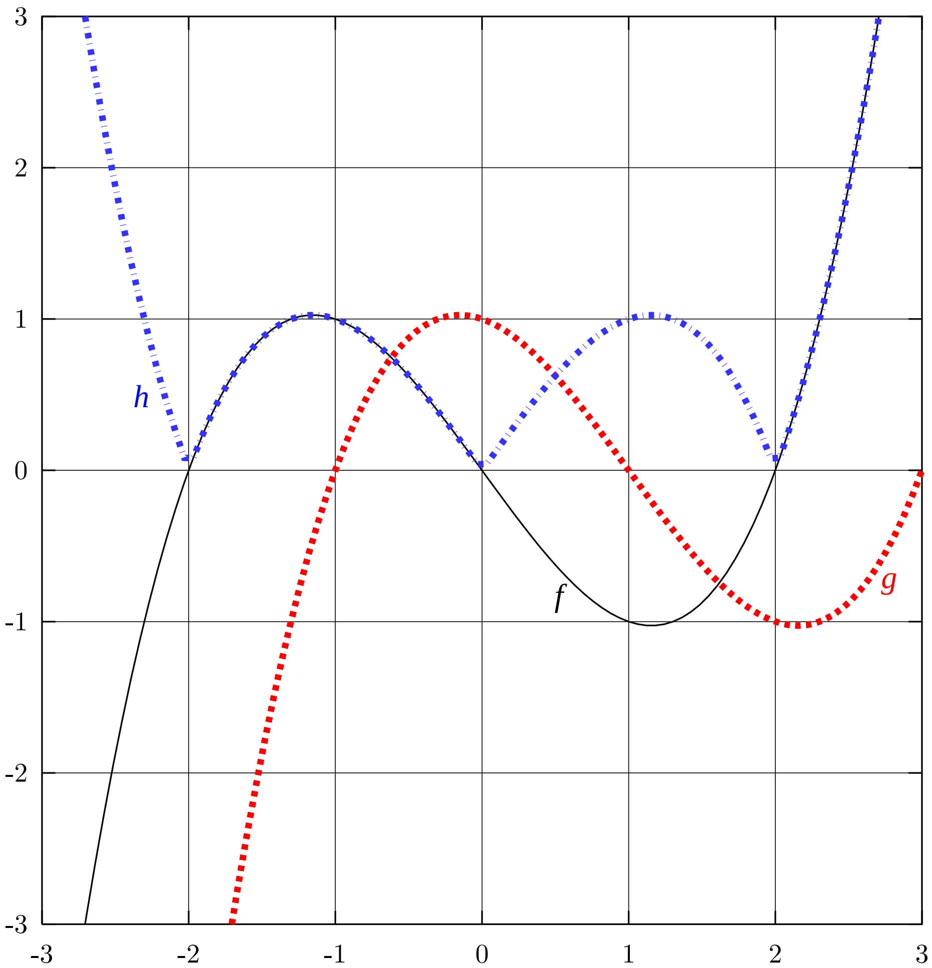
est-elle vraie ? Justifiez votre réponse par une preuve ou un contre-exemple.

PREUVE : Cette formule est vraie. Pour le voir, prenons un $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leqslant 2$. Il faut prouver que $|x+2| \leqslant 4$. Or de l'inégalité $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ avec $a := x$ et $b := 2$, on déduit $|x+2| \leqslant |x| + |2| \leqslant 2 + 2 = 4$ où la dernière inégalité utilise le fait que $|x| \leqslant 2$ (et $|2| = 2$).

Question 4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous. Sur cette même figure, tracez les graphes des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = f(x-1), \qquad h(x) = |f(x)|$$

Expliquez brièvement votre démarche.



- Le graphe de g est une translation horizontale d'une unité vers la droite du graphe de f. En effet, pour avoir la valeur de g en x, il faut reporter en ce point la valeur de f en $x-1$ — c'est-à-dire translater « $f(x-1)$ » d'une unité vers la droite.
- Lorsque $f(x) \geqslant 0$, $h(x) = f(x)$ et les graphes de f et g sont confondus. Lorsque $f(x) \leqslant 0$, $h(x) = -f(x)$, c'est-à-dire que le graphe de h est le symétrique de celui de f par rapport à l'axe des x.

Question 5. *Pour chaque proposition suivante, cochez la case adéquate qui la précède. Justifiez brièvement vos réponses.*

Vrai : ☑ *Faux :* ☐ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \left|z \cdot |z|^{-1}\right| = 1.$

On applique la règle de calcul pour le module d'un produit au premier membre, on obtient $|z| \cdot \left||z|^{-1}\right|$. Puisque le module d'un réel $\geqslant 0$ est ce réel, on a $\left||z|^{-1}\right| = |z|^{-1}$, ce qui termine la preuve vu la définition de l'inverse.

Vrai : ☐ *Faux :* ☑ $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z| + |z'| = |z + z'|.$

C'est faux, voici un contre-exemple : si $z = 2$ et $z' = -1$, on aurait $|2| + |-1| = |2 + (-1)|$, c'est-à-dire $3 = 1$!

Vrai : ☐ *Faux :* ☑ $\forall z \in \mathbb{C}\ (z = |z| \text{ ssi } z \in \mathbb{R}).$

Voici un contre-exemple : si $z = -1$, on aurait $-1 = |-1|$, qui est égal à 1 par définition de $|\cdot|$!

REMARQUE : C'est correct pour z réel positif.

Vrai : ☑ *Faux :* ☐ $\forall z \in \mathbb{C}\ (z = \bar{z} \text{ ssi } z \in \mathbb{R}).$

C'est correct, car $z = \overline{z}$ est équivalent à $z - \overline{z} = 0$, càd $2 \cdot \Im m(z) = 0$ ou encore $\Im m(z) = 0$, ce qui est équivalent à $z \in \mathbb{R}$.

Vrai : ☐ *Faux :* ☑ $\exists z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\ \Big(\mathrm{Arg}(z) \neq \mathrm{Arg}\big(\frac{z}{|z|}\big)\Big).$

C'est faux car on a vu au cours que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(z/\overline{z})$ car z et $z/\overline{z}$ sont deux complexes situés sur la même demi-droite d'origine 0.

Question 6. *Soient D et D' deux droites du plan d'équations respectives*

$$D \equiv ax + by + c = 0 \quad \textit{et} \quad D' \equiv a'x + b'y + c' = 0.$$

(a) *Sous quelle(s) condition(s) sur a, b, c (resp. a', b', c') la pente de la droite D (resp. D') est-elle définie ? Que vaut alors cette pente ?*

(b) *Sous les conditions trouvées en (a), prouvez à l'aide de la notion de produit scalaire que les droites D et D' sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs pentes vaut -1.*

- La pente de la droite D (resp. D') est définie ssi b (resp.b') est non nul . En effet, l'équation $ax + by + c = 0$ peut alors s'écrire
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$
et la pente vaut $-a/b$. Idem pour l'équation $a'x + b'y + c' = 0$.
- Supposons que $b, b' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Un vecteur normal à D (resp. D') est (a, b) (resp. (a', b')). Les droites D et D' sont perpendiculaires ssi
$$\begin{aligned} \text{les vecteurs } (a,b) \text{ et } (a',b') \text{ sont orthogonaux} \quad & \text{ssi} \quad (a,b)\cdot(a',b') = 0 \\ & \text{ssi} \quad aa' + bb' = 0 \quad \text{ssi} \quad aa' = -bb' \\ & \text{ssi} \quad \frac{aa'}{bb'} = -1 \quad \text{ssi} \quad \frac{-a}{b}\cdot\frac{-a'}{b'} = -1 \end{aligned}$$
On conclut grâce au point (a).

Question 7. *Prouvez par récurrence que*

$$\forall n \geqslant 1, \qquad 1+3+5+7+9+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2.$$

PREUVE : Prouvons que l'égalité est correcte pour $n=1$ (la plus petite valeur permise dans l'énoncé). Dans ce cas, $2n+1=3$ et $n+1=2$ et donc le premier membre de l'égalité devient $1+3=4$, qui est le carré de 2.

Prouvons que si la proposition est vraie pour $n=i$, alors la proposition est vraie dans le cas $n=i+1$. Prouver cette implication revient à prouver que si l'égalité

$$1+3+\cdots+(2i+1)=(i+1)^2 \tag{1}$$

est vraie, alors l'égalité

$$1+3+\cdots+[2(i+1)+1]=\big((i+1)+1\big)^2 \tag{2}$$

est vérifiée. On constate que le 1^{er} membre de (2) s'obtient en ajoutant au premier membre de (1) $2(i+1)+1$. D'autre part, si l'on ajoute $2(i+1)+1$ au second membre de (1), on obtient $(i+1)^2+2(i+1)+1=\big((i+1)+1\big)^2$. Ceci prouve l'égalité (2) puisque chaque membre de (2) s'obtient en ajoutant une même quantité à chaque membre de (2).

Question 8. *Soient D et D' les droites du plan d'équations paramétriques*

$$\begin{aligned} D &\equiv (x,y)=(0,2)+\lambda(1,-3), \quad \lambda\in\mathbb{R},\\ D' &\equiv (x,y)=(\tfrac{2}{3},0)+\mu(-3,9), \quad \mu\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ces deux droites sont-elles confondues ? Justifiez en détail.

Recherchons une équation cartésienne de D et D' et voyons si les équations trouvées vérifient une règle de proportionnalité. On passe d'une équation paramétrique à une équation cartésienne en éliminant le paramètre. De l'équation de D, on déduit

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=2-3\lambda \end{cases}$$

Une équation cartésienne de D est donc $y=2-3x$, c'est-à-dire $3x+y-2=0$. De l'équation cartésienne de D', on déduit

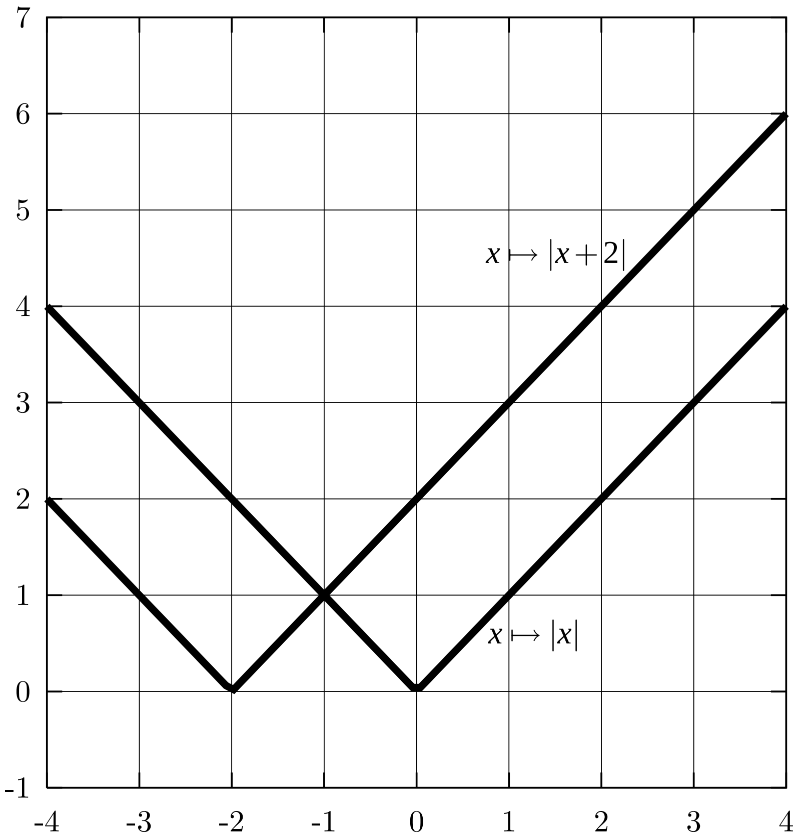
$$\begin{cases} x=\frac{2}{3}-3\mu \\ y=9\mu \end{cases}$$

Une équation cartésienne de D' est donc $x=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}y$, c'est-à-dire $3x+y-2=0$. Les équations de D et D' étant identiques, les droites D et D' sont confondues.

Question 9. *Déterminez de manière graphique et algébrique l'ensemble des réels x tels que*

$$|x+2| \leqslant |x|$$

Justifiez vos calculs.



On voit graphiquement que le graphe de $x \mapsto |x|$ se trouve au dessus de celui de $x \mapsto |x+2|$ ssi $x \leqslant -1$. C'est dire que l'ensemble des solutions est $\{x : x \leqslant -1\} =]-\infty, -1]$.

Algébriquement, on va distinguer trois cas :

- si $x \leqslant -2$, l'inéquation devient $-(x+2) \leqslant -x$, c'est-à-dire $-2 \leqslant 0$, ce qui est vrai quel que soit x ;
- si $-2 \leqslant x \leqslant 0$, l'inéquation devient $x+2 \leqslant -x$, c'est-à-dire $2x \leqslant -2$, ou encore $x \leqslant -1$ et donc les x recherchés sont ceux $\geqslant -2$ et $\leqslant -1$.
- si $x \geqslant 0$, l'inéquation devient $x+2 \leqslant x$, c'est-à-dire $2 \leqslant 0$ ce qui n'est vrai pour aucun x.

En conclusion, les x qui satisfont l'inéquation de départ sont $\leqslant -2$ (1^{er} cas) ou $\geqslant -2$ et $\leqslant -1$ (2^{e} cas). Autrement dit, l'ensemble de ces x est $]-\infty, -2] \cup [-2, -1]$. La solution est donc l'ensemble $]-\infty, -1]$.