

# Mathématique Élémentaire

Test n° 4

(7 octobre 2002)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  la matrice définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } |i - j| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Écrivez explicitement la matrice  $A$ .

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Soit  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Montrez par récurrence que

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}.$$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 3. Quel est l'ensemble des vecteurs orthogonaux aux droites  $D_1$  et  $D_2$  définies par

$$D_1 \equiv (x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(1, 2, 3), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

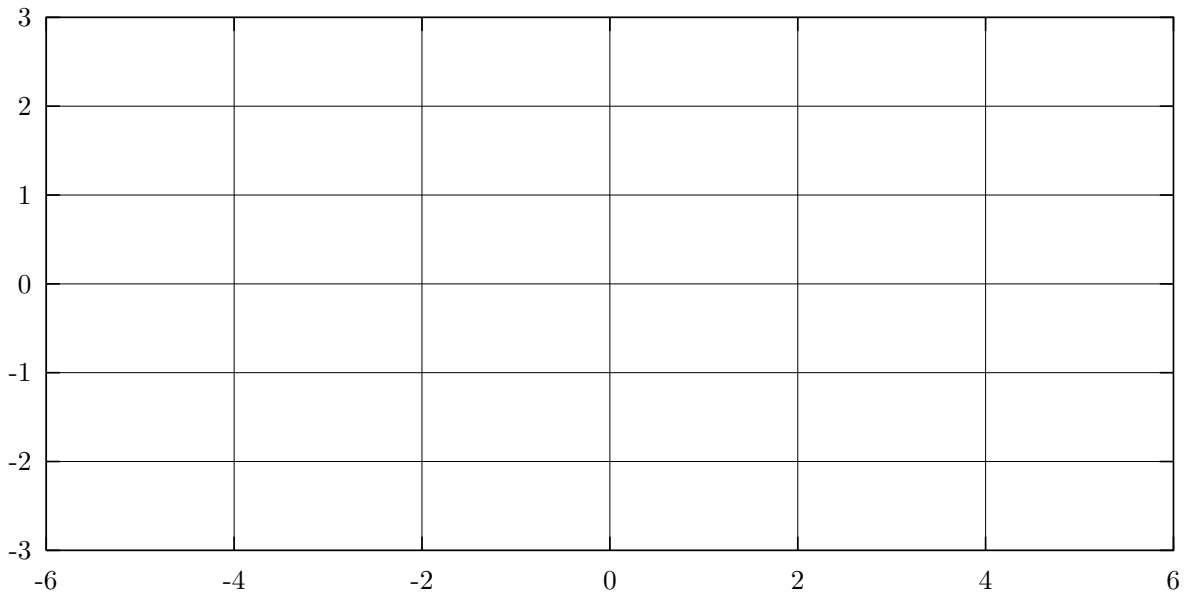
$$D_2 \equiv -x = \frac{y-1}{2} = \frac{4-z}{-1}.$$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4. Représentez sur le graphe ci-dessous la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = e^{-|x|}.$$

Justifiez votre démarche.



Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5. Soit  $f(x) = -2x^2 + bx + c$  où  $b, c \in \mathbb{R}$ . Parmi les propositions suivantes, cochez celle qui est équivalente à

«  $f(x)$  possède deux racines non-nulles de même signe ».

- $c > 0$
- $c = 0$
- $c < 0$
- $b^2 + 8c > 0$
- $b \neq 0$

Argumentez votre choix à l'aide de graphiques commentés.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6. Soit  $f(x) = x^2 + px + q$  où  $p, q \in \mathbb{R}$ . Donnez une condition *nécessaire et suffisante* sur  $p$  et  $q$  pour que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| = f(x).$$

Prouvez algébriquement que cette condition est correcte.

# Informatique

Test n° 4 (7 octobre 2002)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 7. Soit le programme suivant :

```
int main()
{
    int n;
    float terme, somme, x;
    x = 1.5;
    terme = 1.;
    somme = 1.;
    n = 1;
    while (n < 50) {
        /* affirmation à l'entrée : somme ==  $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!}$  */
        ?
        n = n + 1;
        /* affirmation à la sortie : somme ==  $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!}$  */
    }
}
```

Quelles instructions insérer à la place du « ? » pour que l'affirmation reste vraie de manière permanente (penser à la relation qui existe entre un terme et celui qui le précède) ?

# Informatique

Test n° 4 (7 octobre 2002)

---

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.