Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 4 (7 octobre 2002)

Correction

Question 1. *Soit $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ la matrice définie par*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{si } |i-j| \leqslant 1 \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Écrivez explicitement la matrice A.

Notons

$$A = \begin{pmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} & \underline{a}_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & \underline{a}_{32} & \underline{a}_{33} & \underline{a}_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & \underline{a}_{43} & \underline{a}_{44} & \underline{a}_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & \underline{a}_{54} & \underline{a}_{55} \end{pmatrix}$$

Les éléments soulignés sont du type a_{ij} avec $|i-j| \leqslant 1$. Donc,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 2. *Soit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matrice définie par*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Montrez par récurrence que

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}.$$

Rappelons les formules trigonométriques qui nous seront utiles :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - \sin(a)\cdot\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot\sin(b)$$

- Cas de base : montrons la propriété pour $n=1$. Dans ce cas,

$$A^n = A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Supposons que la propriété est vraie pour $n = i$, c'est-à-dire

$$A^i = \begin{pmatrix} \cos i\theta & -\sin i\theta \\ \sin i\theta & \cos i\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

et montrons que la propriété est vérifiée pour $n = i+1$, c'est-à-dire

$$A^{i+1} = \begin{pmatrix} \cos(i+1)\theta & -\sin(i+1)\theta \\ \sin(i+1)\theta & \cos(i+1)\theta \end{pmatrix}$$

Or,

$$\begin{aligned}
A^{i+1} &= A^i \cdot A && \text{(par les règles des exposants)} \\
&= \begin{pmatrix} \cos i\theta & -\sin i\theta \\ \sin i\theta & \cos i\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} && \text{(par hypothèse de récurrence (1))} \\
&= \begin{pmatrix} \cos i\theta \cdot \cos\theta - \sin i\theta \cdot \sin\theta & \cos i\theta \cdot (-\sin i\theta) - \sin i\theta \cdot \cos\theta \\ \sin i\theta \cdot \cos\theta + \cos i\theta \cdot \sin\theta & \sin i\theta \cdot (-\sin\theta) + \cos i\theta \cdot \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(i\theta + \theta) & -\sin(i\theta + \theta) \\ \sin(i\theta + \theta) & \cos(i\theta + \theta) \end{pmatrix} && \text{(voir les formules rappelées)} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(i+1)\theta & -\sin(i+1)\theta \\ \sin(i+1)\theta & \cos(i+1)\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc prouvé (1) pour tout $n \geqslant 1$.

Question 3. *Quel est l'ensemble des vecteurs orthogonaux aux droites D_1 et D_2 définies par*

$$\begin{aligned}
&D_1 \equiv (x,y,z) = (1,2,-1) + \lambda(1,2,3), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\
&D_2 \equiv -x = \frac{y-1}{2} = \frac{4-z}{-1}.
\end{aligned}$$

Un vecteur (x,y,z) est orthogonal aux droites D_1 et D_2 ssi (x,y,z) est à la fois orthogonal à v_1 et v_2 où v_1 (respectivement v_2) est un vecteur directeur de D_1 (respectivement D_2). Un vecteur directeur de D_1 est $v_1 = (1,2,3)$. En écrivant $D_2 \equiv \frac{x-0}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{4}$, on voit qu'un vecteur directeur de D_2 est $v_2 = (-1,2,1)$. Ainsi, (x,y,z) est orthogonal à v_1 et v_2 ssi $x+2y+3z = 0$ et $-x+2y+z = 0$. On est donc ramené à la résolution du système :

$$\begin{cases} x+2y+3z = 0 & (2) \\ -x+2y+z = 0 & (3) \end{cases}$$

En faisant (2)+(3), on obtient $y = -z$ et en remplaçant dans (2), on trouve $x = -z$. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à D_1 et D_2 est :

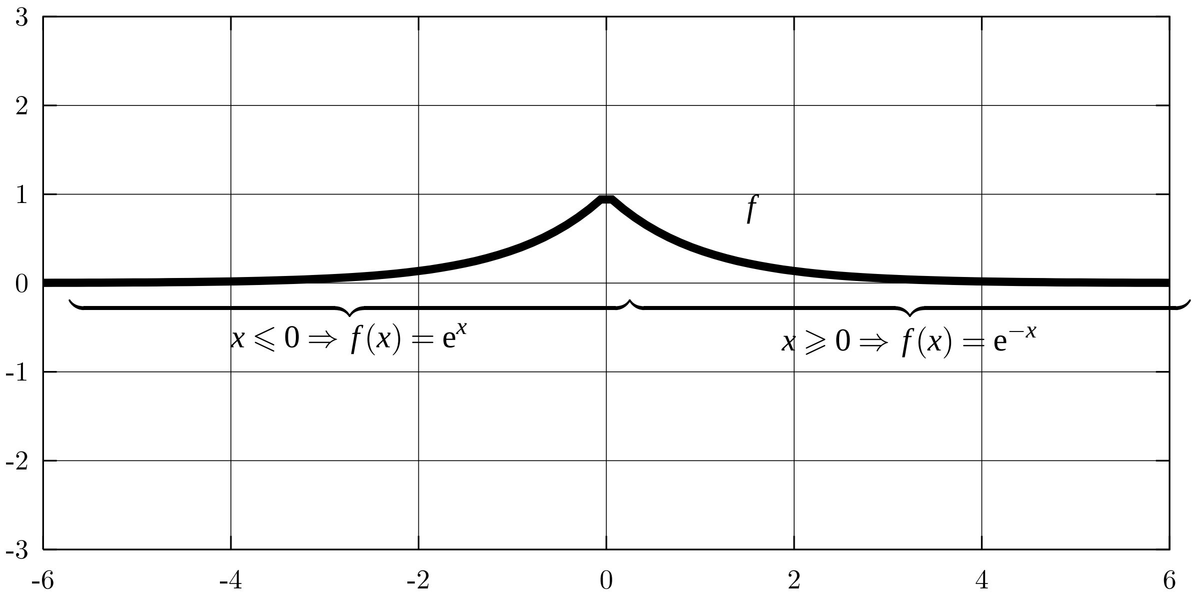
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = -z \wedge x = -z\} = \{(-\lambda, -\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Il s'agit d'une droite passant par $(0,0,0)$ et dont un vecteur directeur est $(-1,-1,1)$.

Question 4. *Représentez sur le graphe ci-dessous la fonction f définie par*

$$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}.$$

Justifiez votre démarche.



Lorsque $x \leqslant 0$, $f(x) = \mathrm{e}^{x}$ puisque $|x| = -x$. Il suffit donc de tracer $x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ et prendre le morceau situé au dessus des $x \leqslant 0$.

On peut faire la même chose pour $x \geqslant 0$.

Une autre manière de procéder pour $x \geqslant 0$ est de remarquer que la fonction f est paire ($f(-x) = \mathrm{e}^{-|-x|} = \mathrm{e}^{-|x|} = f(x)$) et donc que le graphe de f sur les réels positifs n'est que le symétrique du graphe de f pour $x \leqslant 0$ par rapport à la droite d'équation $x = 0$.

Question 5. *Soit* $f(x) = -2x^2 + bx + c$ *où* $b, c \in \mathbb{R}$. *Parmi les propositions suivantes, cochez celle qui est équivalente à*

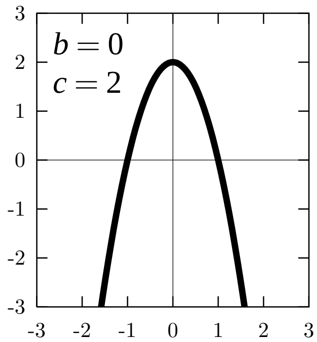
$$\text{« } f(x) \text{ possède deux racines non-nulles de même signe ».} \tag{4}$$

- ☐ $c > 0$
- ☐ $c = 0$
- ☐ $c < 0$
- ☐ $b^2 + 8c > 0$
- ☐ $b \neq 0$

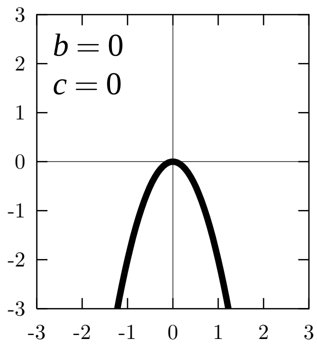
Argumentez votre choix à l'aide de graphiques commentés.

Aucune des cinq propositions n'est équivalente ! Pour le voir, il suffit de donner, pour chacune de ces cinq propositions, un exemple où elle est vraie et (4) est faux ou l'inverse.

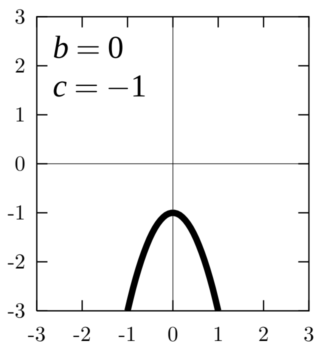
■ $c > 0$
La condition $c > 0$ est vérifiée mais les deux racines de f sont de signes opposés.



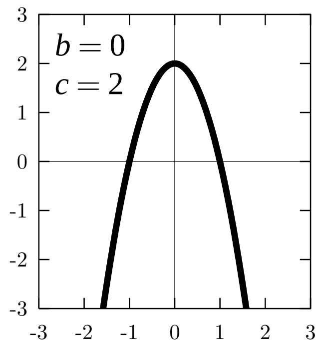
■ $c = 0$
La condition $c = 0$ est vérifiée mais la (seule) racine de f est nulle.



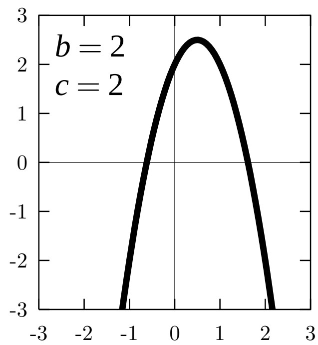
■ $c < 0$
Bien que $c < 0$, f n'a aucune racine.



■ $b^2 + 8c > 0$
La condition $b^2 + 8c > 0$ implique seulement que f possède deux racines, pas que ces racines soient de même signe — comme le graphe le montre.



■ $b \neq 0$
$b \neq 0$ dit que l'axe de symétrie de la parabole n'est pas $x = 0$ mais les racines peuvent ne pas exister (pas montré) et, même si elles existent, elles ne sont pas nécessairement de même signe (ainsi que le graphe ci-contre l'indique).



Question 6. *Soit* $f(x) = x^2 + px + q$ *où* $p, q \in \mathbb{R}$. *Donnez une condition* nécessaire et suffisante *sur* p *et* q *pour que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| = f(x). \tag{5}$$

Prouvez algébriquement que cette condition est correcte.

Rappelons que $|y| = y$ ssi $y \geqslant 0$. La formule (5) est équivalente à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant 0.$$

Puisque la parabole est orientée vers le haut ($x^2 + \cdots$), cela revient à dire qu'elle a une racine double ou elle n'a pas de racine réelle. Donc

$$(5) \Leftrightarrow p^2 - 4q \leqslant 0.$$

Prouvons maintenant algébriquement cette condition.

($\Rightarrow$) Puisque f est positive quelle que soit la valeur de x, on a en particulier que $f(-p/2) = \frac{1}{4}(-p^2 + 4q) \geqslant 0$, ce qui prouve la thèse.

($\Leftarrow$) Rappelons que $f(x) = (x + p/2)^2 + \frac{1}{4}(-p^2 + 4q)$. Donc, étant donné que $-p^2 + 4q \geqslant 0$, on a que $f(x) \geqslant 0$ quel que soit x.