Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 5 (14 octobre 2002) **Correction**

Question 1. *Calculez* $2^{199} \bmod 7$.

$$\begin{aligned}2^{199} \bmod 7 &= \big((2^3)^{66} \cdot 2\big) \bmod 7\\ &= \big((2^3)^{66} \bmod 7 \cdot 2 \bmod 7\big) \bmod 7\\ &= \big((8 \bmod 7)^{66} \cdot 2\big) \bmod 7\\ &= (1 \cdot 2) \bmod 7\\ &= 2\end{aligned}$$

Question 2. *Prouvez que deux complexes non nuls* $a+b\boldsymbol{i}$ *et* $c+d\boldsymbol{i}$ *sont égaux si et seulement si leurs modules et leurs arguments sont égaux.*

Rappelons que $a+b\boldsymbol{i} = \rho \operatorname{cis}\theta = \rho\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta$ où ρ est le module de $a+b\boldsymbol{i}$ et θ est son argument. De même, $c+d\boldsymbol{i} = \rho' \operatorname{cis}\theta'$ avec ρ' et θ' le module et l'argument de $c+d\boldsymbol{i}$. On a donc

$$a+b\boldsymbol{i} = c+d\boldsymbol{i} \quad \text{ssi (vu au cours)} \quad a=c \text{ et } b=d \quad \text{ssi} \quad \begin{cases}\rho\cos\theta = \rho'\cos\theta'\\ \rho\sin\theta = \rho'\sin\theta'\end{cases} \tag{1}$$

Clairement, si $\rho = \rho'$ et $\theta = \theta'$, les deux nombres sont égaux. À l'inverse, (1) implique

$$(\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2 = (\rho'\cos\theta')^2 + (\rho'\sin\theta')^2$$

c'est-à-dire $\rho^2 = \rho'^2$ et donc $\rho = \rho'$ car $\rho, \rho' \geqslant 0$. Dès lors, (1) devient

$$\begin{cases}\cos\theta = \cos\theta'\\ \sin\theta = \sin\theta'\end{cases}$$

car $\rho = \rho' \neq 0$. Ces équations impliquent $\exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi$, et donc $\theta = \theta'$ car ils doivent appartenir à $[0, 2\pi[$.

Question 3. *Calculez la forme trigonométrique de* $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)^5$.

Remarquons que $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$. En utilisant De Moivre (si $z = |z|\operatorname{cis}\theta$ alors $z^n = |z|^n \operatorname{cis}(n\theta)$), on a :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)^5 = \left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^5 = \operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}\ .$$

Question 4. *Soit l'équation du second degré à* coefficients complexes

$$z_2 Z^2 + z_1 Z + z_0 = 0 \qquad \textit{où } z_2 \neq 0. \tag{2}$$

Montrez que la méthode utilisée dans $\mathbb{R}$, adaptée à ce cas général, a un sens *et fournit les deux solutions de l'équation (2). Justifiez votre réponse.*

Comme dans $\mathbb{R}$, on peut calculer $\Delta := z_1^2 - 4z_2z_0$ qui, ici, sera en général un nombre complexe. En « prendre la racine » revient à résoudre

$$(c + d\boldsymbol{i})^2 = \Delta.$$

Cette équation a deux solutions opposées. Si on note $c + d\boldsymbol{i}$ l'une d'entre elles, l'autre sera $-c - d\boldsymbol{i}$. L'analogue des formules dans $\mathbb{R}$ qui donnent les deux racines sont

$$Z_1 = \frac{-z_1 + (c + d\boldsymbol{i})}{2z_2} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = \frac{-z_1 - (c + d\boldsymbol{i})}{2z_2}.$$

Montrons que Z_1 et Z_2 sont effectivement des solutions de (2) ; remplaçons, dans (2), Z par Z_1 :

$$\begin{aligned}
&z_2\Big(\frac{-z_1 + (c + d\boldsymbol{i})}{2z_2}\Big)^2 + z_1 \cdot \frac{-z_1 + (c + d\boldsymbol{i})}{2z_2} + z_0 \\
&= \frac{z_1^2 - 2z_1(c + d\boldsymbol{i}) + (c + d\boldsymbol{i})^2}{4z_2} + \frac{-2z_1^2 + 2z_1(c + d\boldsymbol{i})}{4z_2} + z_0 \\
&= z_1^2 - 2z_1(c + d\boldsymbol{i}) + (c + d\boldsymbol{i})^2 - 2z_1^2 + 2z_1(c + d\boldsymbol{i}) + 4z_0z_2 \qquad (\text{car } z_2 \neq 0) \\
&= -z_1^2 + \Delta + 4z_0z_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Question 5. *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. On dit que A est une matrice symétrique si et seulement si $A^t = A$.*

- *Donnez un exemple de matrice symétrique dans $\mathbb{R}^{3\times 3}$.*
- *Si A est une matrice symétrique, montrez que $A + A^t$ et A^tA le sont aussi.*

Voici deux exemples de matrices symétriques :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Passons maintenant au second point de la question.

- $A + A^t$ est symétrique ssi $(A + A^t)^t = A + A^t$. Or,

$$\begin{aligned}
(A + A^t)^t &= A^t + (A^t)^t && \text{car } (M+N)^t = M^t + N^t \\
&= A^t + A && \\
&= A + A^t && \text{car } +_{\mathbb{R}^{n\times n}} \text{ commutative}
\end{aligned}$$

- A^tA est symétrique ssi $(A^tA)^t = A^tA$. Or,

$$\begin{aligned}(A^tA)^t &= A^t(A^t)^t && \text{car } (MN)^t = N^tM^t\\ &= A^tA\end{aligned}$$

Donc $A+A^t$ et A^tA sont symétriques. (REMARQUE : Notez qu'on n'a pas utilisé le fait que A était symétrique — c'est donc vrai pour toute matrice A.)

Question 6. *Soit les systèmes (S) et (S′) définis par*

$$(S)\begin{cases}x+2\pi^{-1}y+3z=0\\ \pi x+\mathrm{e}y+\pi z=0\end{cases}\qquad (S')\begin{cases}-x-2\pi^{-1}y-3z=0\\ (\mathrm{e}-2)y-2\pi z=0\end{cases}$$

Sans les résoudre, montrez que les systèmes (S) et (S′) sont équivalents.

Les systèmes (S) et (S') sont équivalents ssi ils ont le même ensemble de solutions. Montrons donc que s est solution de (S) ssi s est solution de (S'). Posons $s=(s_1,s_2,s_3)$.

$\Rightarrow$) Supposons que s soit solution de (S). On a donc

$$s_1+2\pi^{-1}s_2+3s_3=0 \tag{3}$$
$$\text{et}\qquad \pi s_1+\mathrm{e}s_2+\pi s_3=0 \tag{4}$$

Montrons que s vérifie les deux équations de (S'). De (3), on déduit que $-s_1-2\pi^{-1}s_2-3s_3=0$. Il reste à voir que $(\mathrm{e}-2)s_2-2\pi s_3=0$. Or,

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}-2)s_2-2\pi s_3 &= \mathrm{e}s_2-2s_2-2\pi s_3\\ &= -\pi s_1-\pi s_3-2s_2-2\pi s_3 && \text{(en tirant } \mathrm{e}s_2 \text{ de (4))}\\ &= -\pi s_1-2s_2-3\pi s_3\\ &= -\pi(s_1+2\pi^{-1}s_2+3s_3)=0 && \text{(grâce à (3))}\end{aligned}$$

Donc s est solution de (S').

$\Leftarrow$) Supposons que s soit solution de (S'). On a donc

$$-s_1-2\pi^{-1}s_2-3s_3=0 \tag{5}$$
$$\text{et}\qquad (\mathrm{e}-2)s_2-2\pi s_3=0 \tag{6}$$

De (5), on déduit que s satisfait la première équation de (S). Il reste à voir que $\pi s_1+es_2+\pi s_3=0$. Or,

$$\begin{aligned}\pi s_1+\mathrm{e}s_2+\pi s_3 &= \pi s_1+2s_2+2\pi s_3+\pi s_3 && \text{(en tirant } \mathrm{e}s_2 \text{ de (6))}\\ &= \pi s_1+2s_2+3\pi s_3\\ &= -\pi(-s_1-2\pi^{-1}s_2-3s_3)=0 && \text{(grâce à (5))}\end{aligned}$$

Question 7. *Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ la relation*

$$f_a : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (y \text{ tel que } |y-a| = x \text{ et } y > 0) \tag{7}$$

est-elle une fonction ? Si vous justifiez à l'aide de graphiques, ceux-ci doivent impérativement être commentés.
Pour chacune des valeurs de a trouvées ci-dessus, précisez le domaine de la fonction.

Nous allons montrer que f_a est une fonction de domaine $\left]\,|a|, +\infty\right[$ si et seulement si $a \leqslant 0$.

$\Leftarrow$) Soit $a \leqslant 0$. Étant donné $x \in \mathbb{R}$, il faut montrer

- si $x \in \left]-a, +\infty\right[$, qu'il existe un seul $y > 0$ qui satisfait $|y-a| = x$
- si $x \notin \left]-a, +\infty\right[$, qu'il n'existe aucun $y > 0$ tel que $|y-a| = x$.

Comme $-a \geqslant 0$ et qu'on cherche $y > 0$, l'équation $|y-a| = x$ devient $y - a = x$, c'est-à-dire

$$y = a + x.$$

On voit donc que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il y a au plus une solution y — ce qui veut dire que f_a est une fonction. D'autre part, pour que le y trouvé réponde aux conditions de (7), il faut qu'il soit > 0, ce qui sera le cas si et seulement si $x > -a = |a|$. Autrement dit, les seuls x auxquels correspondra un y sont ceux appartenant à $\left]\,|a|, +\infty\right[$. Donc $\operatorname{Dom} f_a = \left]\,|a|, +\infty\right[$.

$\Rightarrow$) Supposons au contraire que $a > 0$ et montrons que f_a n'est pas une fonction. En effet, si nous considérons $x = a/2$, les deux valeurs $y = a/2$ et $y = 3a/2$ sont > 0 et vérifient l'équation

$$|y-a| = a/2 = x.$$

On a donc deux images possibles pour le même x, ce qui montre la thèse.