Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 6 (21 octobre 2002)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Résolvez, par la méthode de l'échelonnement, le système $Ax = 0$ où $x \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ et $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 4\\ 1\leqslant j\leqslant 4}}$ est définie par $a_{ij} = j - i$.

Nom :

Prénom :

Section :

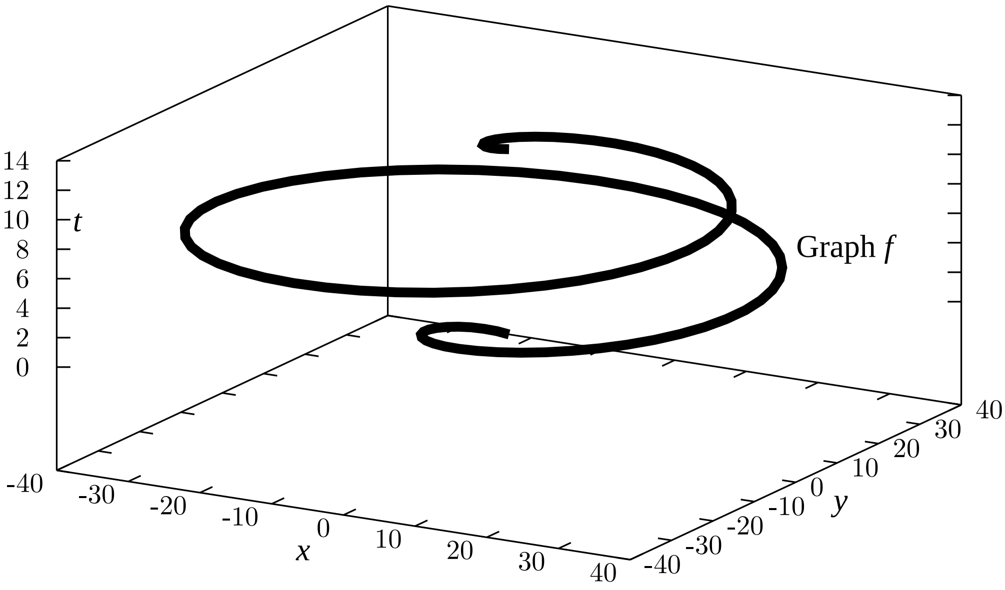
Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

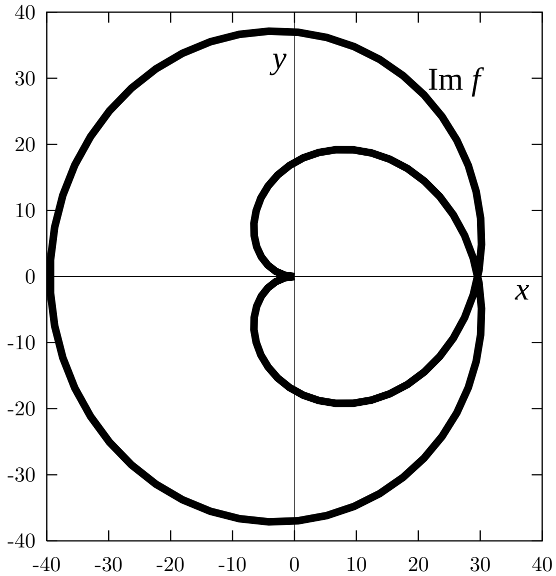
Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (21 octobre 2002)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Soit $f : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x, y) = f(t)$ la fonction dont le graphe et l'image sont représentés ci-dessous. Déterminez, à partir de ces graphiques, si f est injective et si f est surjective. Justifiez vos réponses.





Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (21 octobre 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Soit f et g deux fonctions infiniment dérivables, c'est-à-dire que f', $f^{(2)}$, $f^{(3)}$,..., $f^{(n)}$,... et g', $g^{(2)}$, $g^{(3)}$,..., $g^{(n)}$,... existent pour tout $n \geqslant 1$.

(a) Sachant que $(fg)' = f'g + fg'$, prouver par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$,

$$(fg)^{(n)} = \binom{n}{0} f^{(n)}g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}g' + \cdots + \binom{n}{i} f^{(n-i)}g^{(i)} + \cdots + \binom{n}{n-1} f'g^{(n-1)} + \binom{n}{n} fg^{(n)} \tag{1}$$

(b) Écrire la formule (1) en utilisant le symbole $\sum$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3 (suite). Continuez votre réponse ci-dessous si nécessaire.

Question 4. Prouvez que la fonction $h : \{0,1,2,3,4,5,6\} \to \{0,1,2,3,4,5,6\}$ définie par

$$h(x) = x^2 \bmod 7$$

n'est ni injective, ni surjective.

Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (21 octobre 2002)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Mettez les images des fonctions suivantes sous la forme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : P(x,y)\}$ où $P(x,y)$ est une formule sans quantificateurs.

- $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \cos t)$
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (u,v) \mapsto (u+v, v)$

Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 6 (21 octobre 2002)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Soit l'équation polynomiale

$$a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \cdots + a_1 Z + a_0 = 0 \qquad \text{où les } a_i \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

(a) *Prouver* que si u est une solution dans $\mathbb{C}$ de (2), alors $\bar{u}$ est aussi une solution de (2). Justifiez toutes les étapes de votre preuve.

(b) Du résultat prouvé en (a) et du fait que, si $a_n \neq 0$, alors l'équation (2) a n solutions dans $\mathbb{C}$, *déduisez* que si n est impair et si $a_n \neq 0$, l'équation (2) a (au moins) une racine réelle.

Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (21 octobre 2002)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Calculez les dérivées suivantes :

- $\partial_x\big(x^2y+\ln(ax^2+bxy+cy^2)\big)$

- $\partial_y\big(\sin(y^2\cos(x^2\mathrm{e}^{xy}))\big)$

- $\partial_t\big(\arcsin(\sqrt{t})\big)$

Informatique

Nom : ␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣
Prénom : ␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣
Section : ␣␣␣␣

Test n$^\circ$ 6 (21 octobre 2002)

Question 8. (Rechercher une chaîne de caractères qui respecte certaines conditions.)
Soit `char st[200]` une chaîne contenant 200 caractères et `char ch[2]` une chaîne contenant 2 caractères.
Rechercher dans la chaîne `st` les occurrences de la chaîne `ch` qui ne sont *pas* suivies du caractère blanc `' '`. Les compter.
Décrire en français la méthode utilisée :

Écrire les instructions C traduisant l'algorithme en programme :