Mathématique Élémentaire

Correction

Test n° 6 (21 octobre 2002)

Question 1. *Résolvez, par la méthode de l'échelonnement, le système $Ax = 0$ où $x \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ et $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 4\\ 1\leqslant j\leqslant 4}}$ est définie par $a_{ij} = j - i$.*

Le système $Ax = 0$ s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice augmentée de ce système est donc

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Échelonnons cette matrice.

$$[A|b] \xrightarrow[L_1\leftrightarrow L_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1\leftarrow(-L_1)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3\leftarrow L_3+2L_1\\ L_4\leftarrow L_4+3L_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_3\leftarrow L_3+L_2\\ L_4\leftarrow L_4+2L_2}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice échelonnée correspond au système

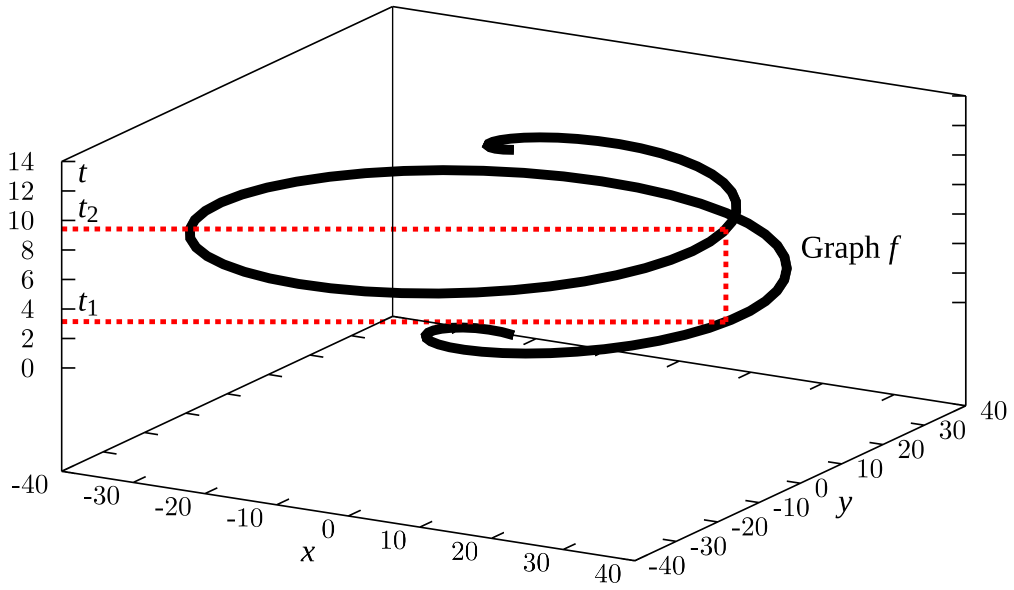
$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

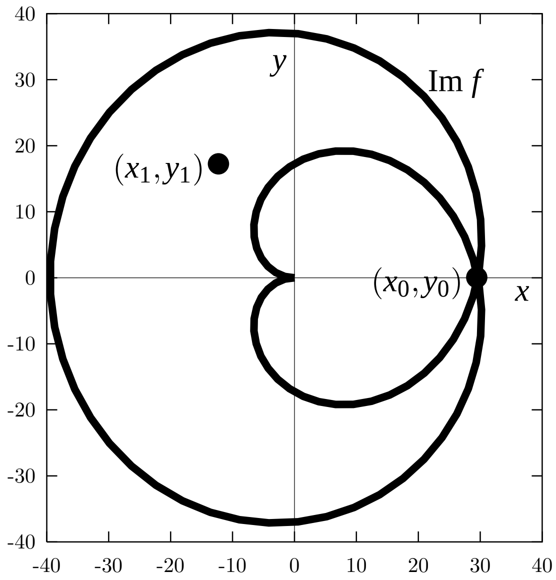
L'ensemble des solutions du système $Ax = 0$ est donc

$$S = \left\{(\lambda + 2\mu, -2\lambda - 3\mu, \lambda, \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

Le système est donc doublement indéterminé.

Question 2. *Soit* $f : [0,4\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x,y) = f(t)$ *la fonction dont le graphe et l'image sont représentés ci-dessous. Déterminez, à partir de ces graphiques, si* f *est injective et si* f *est surjective. Justifiez vos réponses.*





La fonction f n'est pas surjective. En effet, le point $(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$ ci-contre n'appartient pas à l'image de f. Autrement dit $(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{Im} f$ et donc $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^2$.

La fonction f n'est pas injective. Cela résulte du fait que le point (x_0,y_0) — qui est un point d'intersection de la courbe image de f avec elle-même — est l'image t_1 et t_2 (voir graphe ci-dessus). Autrement dit, on a

$$(x_0,y_0) = f(t_1) = f(t_2) \text{ avec } t_1 \neq t_2$$

ce qui contredit la définition d'injectivité. (On aurait aussi pu argumenter la non-injectivité de f à partir de $f(0) = (0,0) = f(4\pi)$ bien que ce fait soit peut-être moins évident sur le dessin.)

Question 3. *Soit f et g deux fonctions infiniment dérivables, c'est-à-dire que f', $f^{(2)}$, $f^{(3)}$,..., $f^{(n)}$,... et g', $g^{(2)}$, $g^{(3)}$,..., $g^{(n)}$,... existent pour tout $n \geqslant 1$.*

(a) *Sachant que $(fg)' = f'g + fg'$, prouver par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$,*

$$(fg)^{(n)} = \binom{n}{0} f^{(n)}g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}g' + \cdots + \binom{n}{i} f^{(n-i)}g^{(i)} + \cdots + \binom{n}{n-1} f'g^{(n-1)} + \binom{n}{n} fg^{(n)} \tag{1}$$

(b) *Écrire la formule (1) en utilisant le symbole $\sum$.*

(b) La forme d'un terme général de la somme est visible dans le terme central de (1). (Pour vérifier qu'elle est valable pour tous les termes, il suffit de se rappeler que $f^{(0)} = f$ et $g^{(0)} = g$.) Donc,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)}g^{(i)}.$$

(a) ▪ Le cas $n = 1$ consiste à vérifier que

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{2}$$

(vu que $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$), formule qu'on sait être vérifiée.

▪ Pour prouver que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)}g^{(i)}, \tag{3}$$

il reste à démontrer l'étape d'induction, c'est-à-dire à prouver que, si (3) est vraie pour $n \leqslant l$, alors (3) est vraie pour $n = l + 1$, avec $l \geqslant 1$. Par hypothèse de récurrence, on a

$$(fg)^{(l)} = \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} f^{(l-i)}g^{(i)}. \tag{4}$$

Par définition de $(fg)^{(l+1)}$, on a $(fg)^{(l+1)} = \big((fg)^{(l)}\big)' = \big(\sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} f^{(l-i)}g^{(i)}\big)'$, au vu de (4). En utilisant (2) et le fait que la dérivée d'une constante fois une fonction est cette constante fois la dérivée de la fonction, on obtient

$$(fg)^{(l+1)} = \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} \left[f^{(l+1-i)}g^{(i)} + f^{(l-i)}g^{(i+1)}\right].$$

Par conséquent, si on regarde le coefficient de $f^{(l+1-k)}g^{(k)}$ pour un $k \in \{0, \ldots, l+1\}$, on obtient $\binom{l}{k} + \binom{l}{k-1}$ (le deuxième terme provient du fait que si $i = k-1$, $f^{(l-i)}g^{(i+1)} = f^{(l+1-k)}g^{(k)}$). On a vu au cours que $\binom{l}{k} + \binom{l}{k-1} = \binom{l+1}{k}$. Ceci termine la preuve (on a utilisé les conventions $\binom{l}{-1} = \binom{l}{l+1} = 0$).

Question 4. *Prouvez que la fonction* $h : \{0,1,2,3,4,5,6\} \to \{0,1,2,3,4,5,6\}$ *définie par*

$$h(x) = x^2 \bmod 7$$

n'est ni injective, ni surjective.

x	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 \bmod 7$	0	1	4	2	2	4	1

Si h était surjective on aurait $\mathrm{Im}(h) = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Ce n'est clairement pas le cas : le tableau montre que $\mathrm{Im}(h) = \{0,1,2,4\}$. L'injectivité signifie que deux points distincts ont des images distinctes : ce n'est pas le cas puisque $h(1) = h(6)$ par exemple.

Question 5. *Mettez les images des fonctions suivantes sous la forme* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : P(x,y)\}$ *où* $P(x,y)$ *est une formule sans quantificateurs.*

- $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \cos t)$
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (u,v) \mapsto (u+v,v)$

Par définition, $\mathrm{Im}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t \in [0,2\pi], (x,y) = (\cos t, \cos t)\}$. Or $(x,y) = (\cos t, \cos t)$ est équivalent à

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos t \end{cases}$$

ce qui implique $x = y$. De plus, pour qu'un couple (x,y) avec $x = y$ s'écrive sous la forme $(\cos t, \cos t)$, il faut que $x \in [-1,1]$. C'est aussi suffisant. Donc

$$\mathrm{Im}(f) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y \wedge x \in [-1,1]\big\}.$$

En ce qui concerne la fonction g, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(g) &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = (u+v,v) \text{ pour certains } u,v \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists u,v \text{ tel que } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right\} \\ &= \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Prouver cette dernière égalité revient à établir deux inclusions :

($\subseteq$) par définition de $\mathrm{Im}(g)$.

($\supseteq$) Il suffit de prendre pour u,v ceux donnés par

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Question 6. *Soit l'équation polynomiale*

$$a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \cdots + a_1 Z + a_0 = 0 \qquad \text{où les } a_i \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

(a) Prouver *que si u est une solution dans $\mathbb{C}$ de (5), alors $\bar{u}$ est aussi une solution de (5). Justifiez toutes les étapes de votre preuve.*

(b) *Du résultat prouvé en (a) et du fait que, si $a_n \neq 0$, alors l'équation (5) a n solutions dans $\mathbb{C}$,* déduisez *que si n est impair et si $a_n \neq 0$, l'équation (5) a (au moins) une racine réelle.*

- Par hypothèse, on a $\sum_{i=0}^n a_j u^j = 0$. En appliquant le conjugué à chaque membre, on obtient $\overline{\sum_{j=0}^n a_j u^j} = \bar{0}$. Puisque $\overline{\sum \cdot} = \sum \bar{\cdot}$, cela devient $\sum_{j=0}^n \overline{a_j u^j} = \bar{0}$. En utilisant $\overline{\prod \cdot} = \prod \bar{\cdot}$, on obtient $\sum_{j=0}^n \overline{a_j}\, \bar{u}^j = \bar{0}$. Puisque le conjugué d'un réel est un réel et vu l'hypothèse sur les a_i, on obtient $\sum_{j=0}^n a_j \bar{u}^j = 0$, ce qui est exactement la définition de « $\bar{u}$ est solution de l'équation $\sum_{j=0}^n a_j Z^j = 0$ ».
- Puisque si $u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\bar{u} \neq u$, on peut regrouper les racines par paires et donc le nombre de racines $\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est nécessairement un nombre pair. Par conséquent, si n est impair et $a_n \neq 0$, l'équation (5) a une racine réelle (puisqu'elle possède n racines complexes).

Question 7. *Calculez les dérivées suivantes :*

- $\partial_x\bigl(x^2 y + \ln(ax^2 + bxy + cy^2)\bigr)$
- $\partial_y\bigl(\sin(y^2 \cos(x^2 e^{xy}))\bigr)$
- $\partial_t\bigl(\arcsin(\sqrt{t})\bigr)$

$$\begin{aligned}
\partial_x\bigl(x^2 y + \ln(ax^2 + bxy + cy^2)\bigr) &= 2xy + \frac{1}{ax^2 + bxy + cy^2} \cdot \partial_x(ax^2 + bxy + cy^2) \\
&= 2xy + \frac{2ax + by}{ax^2 + bxy + cy^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_y\bigl(\sin(y^2 \cos(x^2 e^{xy}))\bigr) &= \bigl(\partial_t \sin t\bigr)\big|_{t = y^2 \cos(x^2 e^{xy})} \cdot \partial_y\bigl(y^2 \cos(x^2 e^{xy})\bigr) \\
&= \cos\bigl(y^2 \cos(x^2 e^{xy})\bigr) \bigl[2y \cos(x^2 e^{xy}) + y^2 \partial_y \cos(x^2 e^{xy})\bigr] \\
&= \cos\bigl(y^2 \cos(x^2 e^{xy})\bigr) \bigl[2y \cos(x^2 e^{xy}) + y^2 \bigl(-\sin(x^2 e^{xy})\bigr) x^3 e^{xy}\bigr]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t\bigl(\arcsin(\sqrt{t})\bigr) &= \bigl(\partial_u \arcsin u\bigr)\big|_{u=\sqrt{t}} \cdot \partial_t \sqrt{t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\bigg|_{u=\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2} t^{-1/2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1-t}\,\sqrt{t}}
\end{aligned}$$