Mathématique Élémentaire

Examen

(27 octobre 2003)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\forall \varepsilon > 0,\ |x^3 - x| < \varepsilon) \Rightarrow x = 0$$

où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue. Cette proposition est-elle vraie ? Si oui, prouvez-la. Dans le cas contraire, donnez un contre-exemple.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & ab & b \\ 0 & a & a \\ b & 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} c & 0 & ac \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Calculez $AB - BA$.

(b) Calculez $\text{dét}(AB - BA)$.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. On considère la fonction $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\alpha(x) = \alpha + x - |\alpha| x^2$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Déterminez tous les α pour lesquels f_α possède deux racines x_1 et x_2 telles que $x_1 < 1 < x_2$. Expliquez votre démarche (en veillant particulièrement à justifier les équivalences).

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2^2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 2^3 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2^n \end{pmatrix}$$

Montrez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 2$, $\text{dét} A = 2^{n(n+1)/2}$.

Mathématique Élémentaire

Examen (27 octobre 2003)

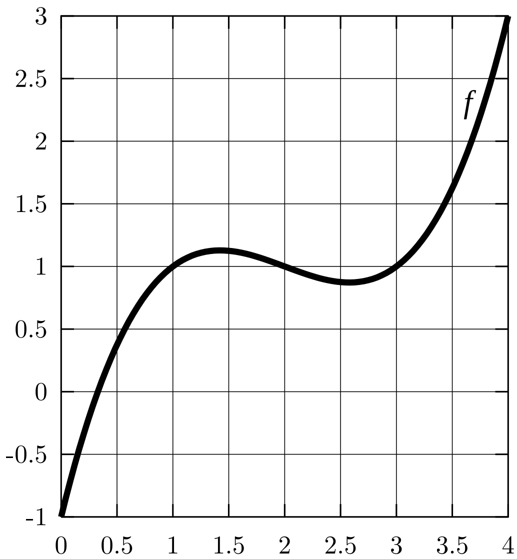
Nom :
Prénom :
Section :

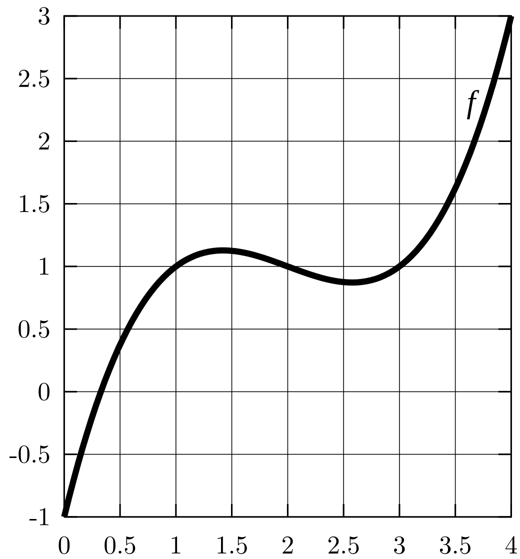
Question 5. Soit $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est dessiné ci-dessous.

(a) Déterminez le ou les $a \in \mathbb{R}$ tels que le graphe de la fonction $x \mapsto f(x-a)$ passe par $(3,1)$.

(b) Déterminez le ou les $b \in \mathbb{R}$ tels que le graphe de la fonction $x \mapsto f(x)+b$ passe par $(2,2)$.

Veuillez argumenter votre réponse (les deux graphes de f sont là à cet effet).





Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \qquad \text{où } m \in \mathbb{R}.$$

(a) Calculez détA. Pour quelles valeurs de m peut-on calculer A^{-1} ?

(b) Calculez, si possible, l'inverse de A pour $m = 3$.

(c) Résolvez, en fonction de m, le système

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Précisez s'il s'agit d'un système impossible, indéterminé,... Interprétez géométriquement vos résultats.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7.

(a) Écrire sous forme trigonométrique $8-(8\sqrt{3})\boldsymbol{i}$.

Mettez sous la forme $a+b\boldsymbol{i}$, avec $a,b\in\mathbb{R}$, le nombre complexe $\dfrac{2-3\boldsymbol{i}}{4-3\boldsymbol{i}}$.

Calculez $\left|\dfrac{(2-3\boldsymbol{i})^2}{4-3\boldsymbol{i}}\right|$.

(b) Représentez graphiquement les nombres complexes z vérifiant

- $|z-1|=2$;
- $|z-1|\leqslant 2$.

(c) Représentez graphiquement les solutions de l'équation $Z^5=16-(16\sqrt{3})\boldsymbol{i}$. Expliquez votre démarche.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ les deux matrices définies par

$$A_{ij} := n - i \qquad \text{et} \qquad B_{ij} := n - j$$

- Donnez la dernière ligne de la matrice $A + B$.

- Soit $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par $C = AB$. Calculez $\sum_{i=1}^{n} C_{ii}$.

Question 9. Calculez

- $\sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{i}^k - \boldsymbol{i}^\ell$ où $\boldsymbol{i}^2 = -1$.

- $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} (j+1)$ avec $n \geqslant 2$.

Nom : ____________

Prénom : ____________

Section : ____

Question 10.

- Définissez « $f : X \to Y$ est surjective ».

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1)$.

- Donnez une équation en x, y, z équivalente à $(x,y,z) \in \operatorname{Im} f$. Démontrez l'équivalence que vous proposez.

$$(x,y,z) \in \operatorname{Im} f \quad \Leftrightarrow \quad \rule{6cm}{0.4pt}$$

- La fonction f est-elle surjective ? Justifiez.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 11.

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Prouvez que, si $1 - z \neq 0$, alors $\sum_{\ell=0}^{n} z^{\ell} = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.

(b) Soit $z := \cos(2\pi/n) + \boldsymbol{i} \sin(2\pi/n)$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Prouvez que les z^k, avec $k = 0, \ldots, n-1$, sont exactement les n solutions de l'équation $Z^n = 1$.

(c) Prouvez que $\sum_{\ell=0}^{n-1} \big(\cos(2\pi\ell/n) + \boldsymbol{i} \sin(2\pi\ell/n)\big) = 0$.

(d) Calculer $\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} \boldsymbol{i}^k$

Mathématique Élémentaire

Examen (27 octobre 2003)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. On considère la fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \cos(\ell t) + \sin(\ell t)$ où $\ell \in \mathbb{R}$. Montrez que x est solution de l'équation :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \partial_t^2 x(t) = -\ell^2 x(t).$$

Question 13. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dont la dérivée $\partial_x g(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. Supposons que g vérifie l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad t g(\mathrm{e}^t) + \cos t = g(t+1).$$

Calculez $g(1)$ et $\partial g(1)$. (Donnez les détails nécessaires pour comprendre votre démarche.)

Mathématique Élémentaire

Examen (27 octobre 2003)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 14.

(a) Exprimez par une formule mathématique qu'une suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $z \in \mathbb{C}$.

(b) Montrez (en appliquant la définition) que la suite $\left(1+(-1)^n \frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 dans $\mathbb{R}$.