Mathématique Élémentaire

Examen (27 octobre 2003) **Correction**

Question 1. *Soit la proposition*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\forall \varepsilon > 0,\ |x^3 - x| < \varepsilon) \Rightarrow x = 0 \tag{1}$$

où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue. Cette proposition est-elle vraie ? Si oui, prouvez-la. Dans le cas contraire, donnez un contre-exemple.

Elle ne l'est pas. Pour voir que (1) est faux, démontrons sa négation :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad (\forall \varepsilon > 0,\ |x^3 - x| < \varepsilon) \wedge x \neq 0$$

Autrment dit, il nous faut trouver un exemple de $x \neq 0$ tel que $\forall \varepsilon > 0,\ |x^3 - x| < \varepsilon$. Nous prétendons que $x = 1$ est un bon choix. En effet, $1 \neq 0$ et $\forall \varepsilon > 0,\ |1^3 - 1| = 0 < \varepsilon$. En conclusion, $x = 1$ est un contre-exemple pour (1) qui est donc faux.

Question 2. *Soient les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} a & ab & b \\ 0 & a & a \\ b & 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} c & 0 & ac \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Calculez $AB - BA$.

$$AB = \begin{pmatrix} a & ab & b \\ 0 & a & a \\ b & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 & ac \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ab & a^2c + ab^2 + bc^2 \\ 0 & a & ab + ac^2 \\ bc & 0 & abc + bc^2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} c & 0 & ac \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & ab & b \\ 0 & a & a \\ b & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + abc & abc & bc + abc \\ b^2 & a & a + b^2 \\ bc^2 & 0 & bc^2 \end{pmatrix}$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} -abc & ab - abc & a^2c + ab^2 + bc^2 - bc - abc \\ -b^2 & 0 & ab + ac^2 - a - b^2 \\ bc - bc^2 & 0 & abc \end{pmatrix}$$

(b) Calculez $\operatorname{dét}(AB - BA)$.

En développant par rapport à la 2^{e} colonne de $AB - BA$:

$$\operatorname{dét}(AB - BA) = -(ab - abc)\big(-ab^3c - (bc - bc^2)(ab + ac^2 - a - b^2)\big)$$

Question 3. *On considère la fonction $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f_\alpha(x) = \alpha + x - |\alpha| x^2$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Déterminez tous les α pour lesquels f_α possède deux racines x_1 et x_2 telles que $x_1 < 1 < x_2$. Expliquez votre démarche (en veillant particulièrement à justifier les équivalences).

Nous allons commencer par montrer que

$$\big(f_\alpha \text{ possède deux racines } x_1 < 1 < x_2\big) \Leftrightarrow \big(f_\alpha(1) > 0 \text{ et } \alpha \neq 0\big) \tag{2}$$

($\Rightarrow$) Tout d'abord $\alpha \neq 0$ car si $\alpha = 0$, $f_\alpha(x) = x$ et donc f_α ne possède pas deux racines. Pour $\alpha \neq 0$, f_α est une fonction polynomiale du second degré dont la concavité est tournée le bas (le coefficient de x^2 est $-|\alpha| < 0$). Par conséquent, $f_\alpha(x) > 0$ pour $x \in]x_1, x_2[$. Vu que $1 \in]x_1, x_2[$, on a $f_\alpha(1) > 0$.

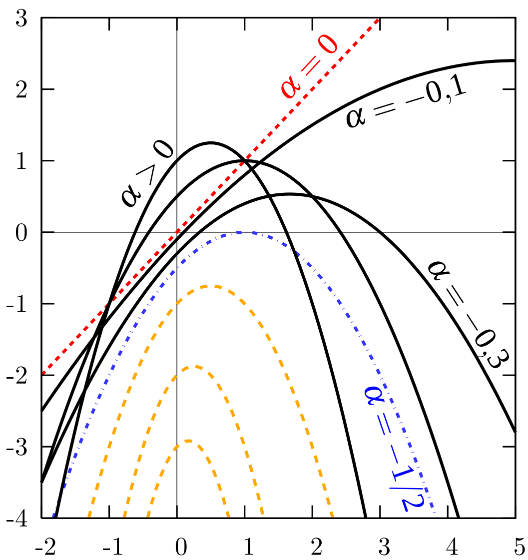
($\Leftarrow$) Puisque $\alpha \neq 0$, le graphe de f_α est une parabole dont la concavité est tournée vers le bas. Dès lors, $f_\alpha(x) < 0$ pour $|x|$ grand (positif ou négatif). En partant de $x = 1$ où $f_\alpha(1) > 0$ et en augmentant x — ce qui nous donnera finalement des valeurs de f_α négatives — on doit forcément croiser l'axe des x et donc trouver un $x_2 > 1$ tel que $f_\alpha(x_2) = 0$. Par un raisonnement similaire pour $x \leqslant 1$, on trouve un $x_1 < 1$ tel que $f_\alpha(x_1) = 0$. □

Résolvons maintenant les (in)équations du membre de droite de (2). Tout d'abord,

$$\begin{aligned} f_\alpha(1) > 0 &\Leftrightarrow \alpha + 1 - |\alpha| > 0 \\ &\Leftrightarrow |\alpha| < \alpha + 1 \\ &\Leftrightarrow -\alpha - 1 < \alpha \quad \text{et} \quad \alpha < \alpha + 1 \\ &\Leftrightarrow -\tfrac{1}{2} < \alpha \quad \text{et} \quad 0 < 1 \\ &\Leftrightarrow -\tfrac{1}{2} < \alpha \end{aligned}$$

Par conséquent les α qui nous intéressent sont $\alpha \in]-1/2, +\infty[\setminus \{0\}$.

Remarque : Sur la figure de droite, les graphes de f_α pour diverses valeurs de α ont été tracés. Le cas « de transition » $\alpha = -1/2$ (pour lequel $f_{-1/2}$ possède une unique racine $x = 1$) et le cas « dégénéré » $\alpha = 0$ apparaissent clairement.



Question 4. *Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2^2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 2^3 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2^n \end{pmatrix}$$

Montrez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\text{dét} A = 2^{n(n+1)/2}. \tag{3}$$

Le cas de base est $n = 2$. Alors, on a $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$. Donc $\text{dét} A = 2^3$ et $2^{2(2+1)/2} = 2^3$. Donc les deux membres sont égaux.

Supposons que (3) soit vérifiée pour $n \leqslant r$, avec $r \geqslant 2$, et montrons cette égalité pour $n = r+1$, c'est-à-dire

$$\text{dét} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2^{r+1} \end{pmatrix} = 2^{(r+1)(r+2)/2}$$

Or,

$$\begin{aligned} \text{dét} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2^{r+1} \end{pmatrix} &= 2^{r+1} \underbrace{(-1)^{2(r+1)}}_{=1} \text{dét} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2^{r} \end{pmatrix} && \left(\begin{array}{l}\text{En développant le dét.} \\ \text{par rapport à la dernière} \\ \text{ligne.}\end{array}\right) \\ &= 2^{r+1}\, 2^{r(r+1)/2} && \text{(par hyp. de réc.)} \\ &= 2^{(r+1)(1+r/2)} \\ &= 2^{(r+1)(2+r)/2} \end{aligned}$$

Question 5. *Soit $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est dessiné ci-dessous.*

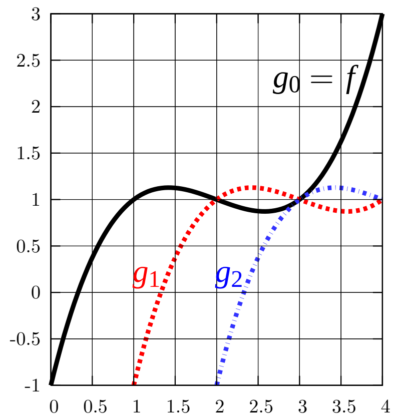
(a) *Déterminez le ou les $a \in \mathbb{R}$ tels que le graphe de la fonction $x \mapsto f(x-a)$ passe par $(3,1)$.*

(b) *Déterminez le ou les $b \in \mathbb{R}$ tels que le graphe de la fonction $x \mapsto f(x)+b$ passe par $(2,2)$.*

Veuillez argumenter votre réponse (les deux graphes de f sont là à cet effet).

(a) Posons $g_a(x) := f(x-a)$. Le graphe de g_a correspond à une translation horizontale de celui de f d'amplitude a. Pour que g_a puisse prendre la valeur de 1, il faut translater les points de f qui ont déjà cette valeur. Or $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$ sont les seuls points pour lesquels f vaut 1. Pour amener ces points en 3, il faut respectivement les translater de $a = 2$, $a = 1$ et $a = 0$ unités. Les valeurs que nous recherchons sont donc

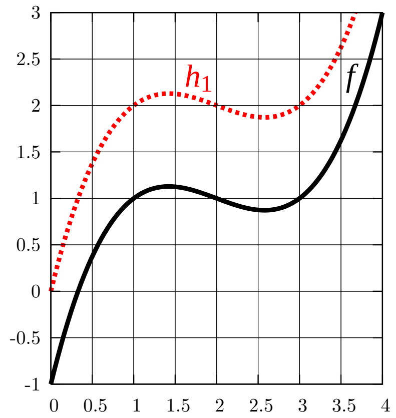
$$a \in \{0,1,2\}$$



REMARQUE : On peut arriver au même résultat par calcul. En effet, $g_a(3) = 1$ veut dire que $f(3-a) = 1$. Or comme les seules valeurs auquelles f prend la valeur 1 sont 1, 2 et 3, cette dernière égalité est équivalent à $3-a \in \{1,2,3\}$ ou encore $a \in \{2,1,0\}$.

(b) Posons $h_b(x) := f(x)+b$. Le graphe de h_b correspond à une translation verticale de b unités de celui de f. Pour prendre la valeur 2 en $x = 2$, la seule possibilité est de déplacer le graphe de f de 1 unité vers le haut. Autrement dit, $b = 1$ est la réponse demandée.

REMARQUE : Ici aussi il est possible de faire les choses par calcul. En effet, $h_b(2) = 2$ se traduit par $f(2)+b = 2$ ou encore, $b = 2 - f(2) = 2-1 = 1$.



Question 6. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \qquad \text{où } m \in \mathbb{R}.$$

(a) *Calculez* détA. *Pour quelles valeurs de m peut-on calculer A^{-1} ?*

(b) *Calculez, si possible, l'inverse de A pour $m = 3$.*

(c) *Résolvez, en fonction de m, le système*

$$\begin{cases} mx+y+z = 1 \\ x+my+z = m \\ x+y+mz = m^2 \end{cases}$$

Précisez s'il s'agit d'un système impossible, indéterminé,... Interprétez géométriquement vos résultats.

- $\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+2)$. On peut calculer A^{-1} ssi dét$A \neq 0$ ssi $m \neq 1$ et $m \neq 2$.

- A^{-1} existe pour $m=3$. On a dét$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (3-1)^2(3+2) = 2^2 5 = 20$ et

$$A^{-1} = \frac{1}{20} \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}^t}_{\text{Transposée de la matrice des cofacteurs}} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/10 & -1/10 \\ -1/10 & 2/5 & -1/10 \\ -1/10 & -1/10 & 2/5 \end{pmatrix}$$

- Le système s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \end{pmatrix}$$

<u>1^er^ cas : $m \neq 1$ et $m \neq 2$.</u> Alors le système a une unique solution donnée par la méthode de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix}}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 0 & 1-m \\ m^2 & 1-m^2 & m-m^2 \end{vmatrix}}{(m-1)^2(m+2)} \qquad \begin{pmatrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{-(1-m)(1-m^2)}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{1-m^2}{(m-1)(m+2)}$$
$$= -\frac{m+1}{m+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m^2 & m \end{vmatrix}}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{(m-1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{1}{m+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m^2 \end{vmatrix}}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{(m^2-1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{(m+1)^2}{m+2}$$

Géométriquement, on a 3 plans qui se coupent en 1 point.

<u>2^e^ cas : $m=1$.</u> Alors la matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Le système se réduit à l'équation $x+y+z=1$. L'ensemble S des solutions est donc $S = \{(\lambda, \mu, 1-\lambda-\mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. C'est un système doublement indéterminé. Géométriquement, l'ensemble des solutions est le plan d'équation $x+y+z=1$.

3^e cas : $m = 2$. Alors la matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3/3]{L_2 \leftarrow -L_2/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Vu la forme de la 2^e et la 3^e ligne, le système est impossible et donc $S = \varnothing$. Géométriquement, on a 3 plans gauches.

Question 7.

(a) *Écrire sous forme trigonométrique* $8 - (8\sqrt{3})\boldsymbol{i}$.

$$8 - (8\sqrt{3})\boldsymbol{i} = 16\Big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\Big) = 16\Big(\cos\frac{5\pi}{3} + \boldsymbol{i}\sin\frac{5\pi}{3}\Big)$$

Mettez sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$, *avec* $a, b \in \mathbb{R}$, *le nombre complexe* $\dfrac{2-3\boldsymbol{i}}{4-3\boldsymbol{i}}$.

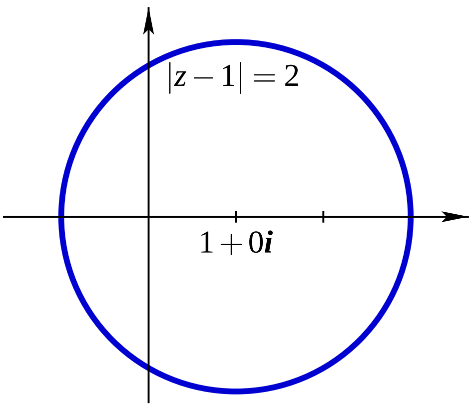
$$\frac{2-3\boldsymbol{i}}{4-3\boldsymbol{i}} = \frac{(2-3\boldsymbol{i})(4+3\boldsymbol{i})}{4^2+3^2} = \frac{17}{25} - \frac{6}{25}\boldsymbol{i}$$

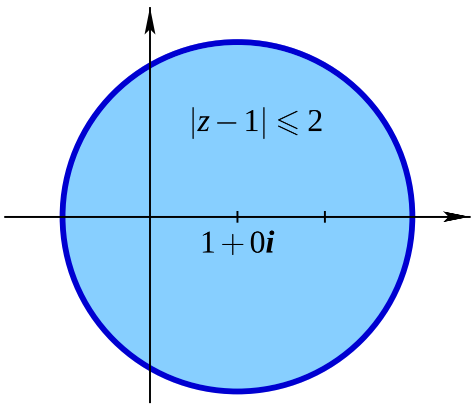
Calculez $\left|\dfrac{(2-3\boldsymbol{i})^2}{4-3\boldsymbol{i}}\right|$.

$$\left|\frac{(2-3\boldsymbol{i})^2}{4-3\boldsymbol{i}}\right| = \frac{|2-3\boldsymbol{i}|^2}{|4-3\boldsymbol{i}|} = \frac{2^2+3^2}{5} = \frac{13}{5}$$

(b) *Représentez graphiquement les nombres complexes z vérifiant*

- $|z-1| = 2$;
- $|z-1| \leqslant 2$.

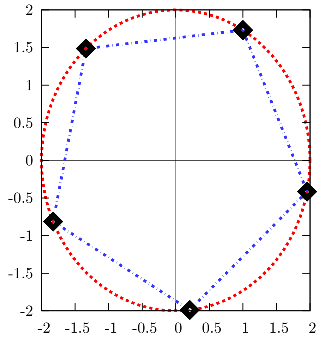




C'est un cercle de rayon 2 centré en 1. $\{z : |z-1| \leqslant 2\}$ est la boule fermée de rayon 2 centrée en 1. Justification : $|\cdot|$ est la norme usuelle de $\mathbb{R}^2$.

(c) *Représentez graphiquement les solutions de l'équation $Z^5 = 16 - (16\sqrt{3})\boldsymbol{i}$. Expliquez votre démarche.*

Il s'agit de l'équation $Z^5 = 2^5(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})\boldsymbol{i} = 2^5 \operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}$. Les solutions sont au nombre de 5, de module 2. La première solution est $2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$, les autres sont obtenues en multipliant cette première solution par les solutions de $Z^5 = 1$. Les cinq solutions sont les sommets d'un pentagone régulier.



Question 8. *Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ les deux matrices définies par*

$$A_{ij} := n - i \qquad et \qquad B_{ij} := n - j$$

- *Donnez la dernière ligne de la matrice $A+B$.*

$$(A+B)_{nj} = A_{nj} + B_{nj} = n - n + n - j = n - j$$

La dernière ligne de $A+B$ sera donc : $\begin{pmatrix} n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

- *Soit $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par $C = AB$. Calculez $\sum_{i=1}^{n} C_{ii}$.*

On a

$$C_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (n-i)(n-i) = n(n-i)^2$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} C_{ii} = n\sum_{i=1}^{n}(n-i)^2 &= n\left(\sum_{i=1}^{n} n^2 - 2n\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} i^2\right)\\ &= n\left(n^3 - 2n\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\ &= n^4 - n^3(n+1) + \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

Question 9. *Calculez*

- $\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{i}^k - \boldsymbol{i}^\ell$ *où* $\boldsymbol{i}^2 = -1$.

Il s'agit de sommer tous les éléments d'une matrice antisymétrique, $\boldsymbol{i}^k - \boldsymbol{i}^l = -(\boldsymbol{i}^l - \boldsymbol{i}^k)$. Donc la somme vaut 0.

- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}(j+1)$ *avec* $n \geqslant 2$.

  Il s'agit de sommer tous les éléments de la partie triangulaire supérieure de la matrice suivante (y compris la diagonale) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}$$

  Ce qui revient à calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Question 10.

- *Définissez « $f : X \to Y$ est surjective ».*

$$\forall y \in Y,\ \exists x \in \operatorname{Dom} f,\ f(x) = y \quad \text{ou encore} \quad \operatorname{Im} f = Y.$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (\alpha,\beta) \mapsto \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1)$.

- *Donnez une équation en x, y, z équivalente à $(x,y,z) \in \operatorname{Im} f$. Démontrez l'équivalence que vous proposez.*

$$(x,y,z) \in \operatorname{Im} f \quad \Leftrightarrow \quad z = x + y$$

  ($\Rightarrow$) Par définition de l'image, $(x,y,z) \in \operatorname{Im} f$ veut dire que $(x,y,z) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1)$ pour certains α, $\beta \in \mathbb{R}$. L'égalité des composantes des deux triplets donne

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha + \beta \end{cases}$$

  D'où $z = x + y$ en remplaçant α et β données par les deux premières équations dans la troisième.

  ($\Leftarrow$) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ solution de $z = x + y$. Il faut montrer que $(x,y,z) \in \operatorname{Im} f$, c'est-à-dire que $(x,y,z) = f(\alpha,\beta)$ pour un certain $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Vu que

$$(x,y,z) = (x,y,x+y) = x(1,0,1) + y(0,1,1) = f(x,y),$$

  c'est le cas avec $(\alpha,\beta) = (x,y)$.

- *La fonction f est-elle surjective ? Justifiez.*

  Non. En effet $(1,1,1)$ (par exemple) n'appartient pas à l'image de f vu qu'il ne vérifie pas l'équation $z = x + y$.

Question 11.

(a) *Soit $z \in \mathbb{C}$. Prouvez que, si $1 - z \neq 0$, alors* $\sum_{\ell=0}^{n} z^\ell = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.

Clairement, $(1-z)(1+z^2+\cdots+z^n) = 1 - z^{n+1}$, donc si $1 - z \neq 0$, on a le résultat annoncé.

(b) *Soit $z := \cos(2\pi/n) + \boldsymbol{i}\sin(2\pi/n)$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Prouvez que les z^k, avec $k = 0, \ldots, n-1$, sont exactement les n solutions de l'équation $Z^n = 1$.*

Les solutions de l'équation $Z^n = 1$ sont $\operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n}$ avec $k = 0, \ldots, n-1$. Or $z = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{n}$ et par la formule de De Moivre, $z^k = \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n}$. Ceci fournit la conclusion.

(c) *Prouvez que* $\sum_{\ell=0}^{n-1} \big(\cos(2\pi\ell/n) + \boldsymbol{i}\sin(2\pi\ell/n)\big) = 0$.

Puisque $z := \cos(2\pi\ell/n) + \boldsymbol{i}\sin(2\pi\ell/n) = (\operatorname{cis} \frac{2\pi}{n})^\ell$, il s'agit d'un cas particulier de la somme de la question (a). Clairement $1 - z \neq 0$. Donc on a que la somme est égale à :

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} \big(\cos(2\pi\ell/n) + \boldsymbol{i}\sin(2\pi\ell/n)\big) = \frac{1 - (\operatorname{cis} \frac{2\pi}{n})^n}{\operatorname{cis} \frac{2\pi}{n}}$$

qui vaut 0 puisque $(\operatorname{cis} \frac{2\pi}{n})^n = 1$.

(d) *Calculer* $\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} \boldsymbol{i}^k$

$$\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} \boldsymbol{i}^k = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} \boldsymbol{i}^k 1^{8-k} = (\boldsymbol{i} + 1)^8 \qquad \text{(formule du binôme de Newton)}$$
$$= \left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right)\right)^8 = 2^4\left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)^8 = 16$$

Question 12. *On considère la fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \cos(\ell t) + \sin(\ell t)$ où $\ell \in \mathbb{R}$. Montrez que x est solution de l'équation :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \partial_t^2 x(t) = -\ell^2 x(t).$$

Les dérivées de x sont

$$\partial_t x(t) = -\ell \sin(\ell t) + \ell \cos(\ell t) \qquad \text{et} \qquad \partial_t^2 x(t) = -\ell^2 \cos(\ell t) - \ell^2 \sin(\ell t)$$

Par conséquent,

$$\partial_t^2 x(t) = -\ell^2 \big(\cos(\ell t) - \sin(\ell t)\big) = -\ell^2 x(t)$$

comme il fallait montrer.

Question 13. *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dont la dérivée $\partial_x g(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. Supposons que g vérifie l'équation*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad t \cdot g(\mathrm{e}^t) + \cos t = g(t+1). \tag{4}$$

Calculez $g(1)$ et $\partial g(1)$. (Donnez les détails nécessaires pour comprendre votre démarche.)

Puisque les deux fonctions $t \mapsto tg(e^t) + \cos t$ et $t \mapsto g(t+1)$ sont égales, il en est de même pour leurs dérivées. Dès lors, on a

$$\begin{aligned} &\forall t \in \mathbb{R}, \quad \partial_t\big(tg(\mathrm{e}^t) + \cos t\big) = \partial_t\big(g(t+1)\big) \\ \text{i.e.,} \quad &\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(\mathrm{e}^t) + t\,\partial_x g(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^t - \sin t = \partial_x g(t+1) \end{aligned}$$

En particulier, pour $t = 0$, on trouve :

$$g(1) = \partial_x g(1) \tag{5}$$

En prenant $t = 0$ dans (4), on a :

$$1 = \cos 0 = g(1) \tag{6}$$

Ainsi (5) et (6) impliquent que :

$$\partial_x g(1) = 1$$

Question 14.

(a) *Exprimez par une formule mathématique qu'une suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $z \in \mathbb{C}$.*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |z_n - z| \leqslant \varepsilon.$$

(b) *Montrez (en appliquant la définition) que la suite $\left(1 + (-1)^n \dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 dans $\mathbb{R}$.*

Fixons un $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$, quelconque. Montrons qu'il existe un seuil dans les indices, noté n_0 (et dépendant de ε) tel qu'au-delà de cet indice on a :

$$\left|1 + (-1)^n \frac{1}{n+1} - 1\right| \leqslant \varepsilon,$$

c'est-à-dire tel que

$$\left|(-1)^n \frac{1}{n+1}\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon.$$

On remarque que :

$$E := \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon\right\} = \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\varepsilon} \leqslant n+1\right\}$$

Vu que $1/\varepsilon$ est fixé, cet ensemble est cofini (ensemble dont le complémentaire est fini), c'est-à-dire qu'il existe n_0 (ici le plus petit élément) tel que $\forall n \geqslant n_0,\ n \in E$. Vu que cet argument est valable quel que soit $\varepsilon > 0$, on a prouvé la convergence la suite vers 1.