Mathématique Élémentaire

Examen (14 janvier 2004)

Nom : ____________

Prénom : ____________

Section : ______

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Prouvez l'équivalence suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0},\ x^2 - x < \varepsilon\big) \Leftrightarrow x \in [0,1].$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Esquissez les graphes des fonctions suivantes. Expliquez brièvement les principales étapes qui mènent à vos graphiques (un tableau de valeurs n'est pas une justification complète).

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}, \qquad g : \mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}, \qquad h : \mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x} \cdot \sin x.$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Montrez, par l'absurde, que $\sqrt{21}$ est irrationnel.

Question 4. Soit l'équation

$$a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \cdots + a_1 Z + a_0 = 0$$

où $\forall i = 0, \ldots, n,\ a_i \in \mathbb{R}$. Prouvez que si $\boldsymbol{i}$ est solution de cette équation, alors $-\boldsymbol{i}$ l'est aussi. Détaillez chaque étape de votre raisonnement.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5.

(a) Donnez le module et l'argument de $\left(\sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)^6$.

(b) Donnez toutes les solutions de l'équation $Z^6 = 1$.

(c) Montrez que les solutions de l'équation $Z^6 = -8\boldsymbol{i}$ sont données par

$$(1+\boldsymbol{i}) \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{6}\right) \qquad \text{où } k \in \{0,1,2,3,4,5\}.$$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. On définit la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ par la récurrence suivante :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(n+1) = \sqrt{1 + f(n)} \end{cases}$$

Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7.

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Prouvez que, si $1 - z \neq 0$, alors $\sum_{j=0}^{n} z^j = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.

(b) Calculez $\sum_{j=0}^{15} (1 - \boldsymbol{i})^j$

(c) Considérons les nombres complexes u_k, avec $k = 0, \ldots, n-1$ solutions de l'équation $Z^n = 1$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrez que $\sum_{k=0}^{n-1} u_k = 0$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Trouvez toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la fonction

$$f_\alpha : [0,+\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - |\alpha|x + 5 - \alpha^2$$

possède une unique racine dans son domaine, c'est-à-dire une unique *racine positive* x^*. Justifiez votre réponse. Si vous utilisez des graphiques, veuillez expliquer clairement comment ils interviennent dans votre argument.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{arctg}(e^{x^2+x})$. Calculez le polynôme du second degré $p(x) = ax^2 + bx + c$ de manière à ce que

$$p(0) = f(0), \qquad \partial_x p(0) = \partial_x f(0) \quad \text{et} \quad \partial_x^2 p(0) = \partial_x^2 f(0).$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ k+1 & k & k \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

où $k \in \mathbb{R}$.

(a) Calculez le déterminant de A.

(b) Soit le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ k+1 & k & k \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix}$$

où $k \in \mathbb{R}$. Résolvez ce système *uniquement* dans le cas où le déterminant de la matrice A est nul. Précisez s'il s'agit d'un système impossible, indéterminé,...

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

En vous basant sur la méthode des cofacteurs, montrez, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\text{dét} A = n!$$

Mathématique Élémentaire

Examen (14 janvier 2004)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Calculez

- $\sum_{v=-5}^{k+8} (v-\sqrt{7})$

- $\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} (s^{2004}-t^{2004})$

- $\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=1}^{k} \binom{k}{\ell}$

- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} (2j-i)$

Question 13. Soient les deux matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définies par

$$A_{ij} = i+j, \qquad B_{ij} = i-j.$$

Considérons la matrice $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie par $C = AB$. Calculez $\sum_{i=1}^{n} C_{ii}$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 14. Calculez, si possible, l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 14 (suite). Résolvez le système

$$\begin{cases} x+2y = z+1 \\ 2x+4z = 2-2y \\ 3z = x+3y \end{cases}$$

L'efficacité de la méthode utilisée est importante.

Question 15. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} x-2 & 1 \\ -2 & x \end{pmatrix}$.

(a) En supposant qu'on travaille dans $\mathbb{R}$, expliquez pour quelle(s) valeur(s) de x cette matrice est inversible.

(b) Même question qu'en (a) en supposant qu'on travaille à présent dans $\mathbb{C}$.