Mathématique Élémentaire

Examen (15 juin 2004)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{t}\sum_{\ell=0}^{j}\binom{j}{\ell}$

- $\displaystyle\sum_{v=-3}^{s}(v^2-\pi)$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\omega}\sum_{p=0}^{\omega}(np)^{2004}(p-n)$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. On dit que deux matrices $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ commutent si $MN = NM$. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices inversibles qui commutent. Montrez que A^{-1} et B commutent.

Question 3. Déterminez les vecteurs $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux à la fois aux vecteurs $(1, -2, 4)$ et $(2, -1, 5)$. Décrivez l'objet géométrique formé par ces vecteurs (x_1, x_2, x_3).

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Esquissez le graphe de chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$
- $g(x) = 1 + \sin(x-1)$
- $h(x) = x + \dfrac{1}{x}$

Expliquez votre démarche. (Un tableau de valeurs n'est pas une justification complète.)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la famille de fonctions définies par

$$f_\alpha(x) = (\alpha^2 - 1)x^2 + \sin(\alpha)x + \alpha$$

où α est un paramètre réel. Veuillez donner tous les $\alpha \in \mathbb{R}$ (s'il en existe) tels que

(a) le graphe de f_α soit une droite ;

(b) f_α possède une racine strictement positive et une racine strictement négative.

Pour chacun des deux cas, il est essentiel de justifier les différentes étapes de votre raisonnement.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} -m & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

où m est un paramètre réel. Calculez, si possible, l'inverse de A en fonction de m.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (x-\pi)^3 e^{\sin x}$$

Trouvez tous les points $x \in \mathbb{R}$ tels que $(x-\pi)\partial f(x) - 3f(x) = 0$.

Question 8. Soit le polynôme

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad \text{où } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \text{ et } a_n \neq 0.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrez que $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$. Détaillez et justifiez chaque étape de votre raisonnement.

Mathématique Élémentaire

Examen (15 juin 2004)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Démontrez celles qui sont vraies et donnez un contre-exemple pour celles qui sont fausses.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall z \in \mathbb{C},\ |\boldsymbol{i}z| = |z|$

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall z \in \mathbb{C},\ \overline{3\boldsymbol{i}z} = -3\boldsymbol{i}\bar{z}$

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall z \in \mathbb{C},\ \arg(z\boldsymbol{i}) = \arg z$

Mathématique Élémentaire

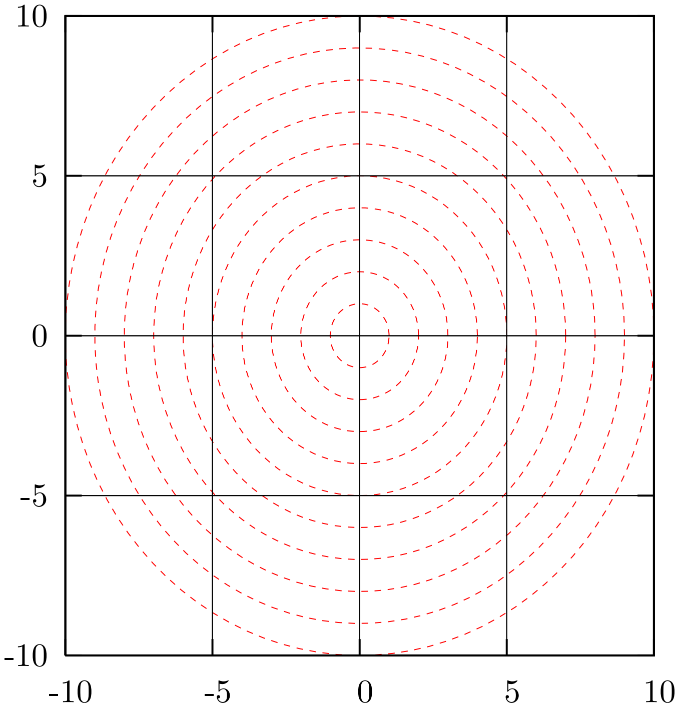
Examen (15 juin 2004)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Représentez graphiquement les solutions complexes de l'équation $z^8 = 81$. Expliquez votre construction.



Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 11. Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 0 & 3^2 & 3^2 & 3^2 & \dots & 3^2 \\ 0 & 0 & 3^3 & 3^3 & \dots & 3^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 3^n \end{pmatrix}$$

En utilisant la méthode des cofacteurs, montrez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\text{dét} M = 3^{n(n+1)/2}.$$