Mathématique Élémentaire

Examen (16 août 2004)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{t}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}$

- $\displaystyle\sum_{v=-3}^{s}(v-\sqrt{2})(v+\sqrt{2})$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\omega}\sum_{p=0}^{\omega}(np)^{2004}\,(p^2-n^2)$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Résolvez de manière graphique et algébrique l'inéquation

$$|x| - 1 < (x-1)^2 .$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Esquissez les graphes des fonctions suivantes. Expliquez brièvement les principales étapes qui mènent à vos graphiques (un tableau de valeurs n'est pas une justification complète).

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \qquad g(x) = \frac{x^3}{x^2-1} \qquad h(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin x$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4.

(a) Donnez le module et l'argument de $\left(\sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)^6$.

(b) Donnez toutes les solutions de l'équation $Z^6 = 1$.

(c) Montrez que les solutions de l'équation $Z^6 = -8\boldsymbol{i}$ sont données par

$$(1+\boldsymbol{i}) \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{6}\right) \qquad \text{où } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5.

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Supposons que $1-z \neq 0$. Prouvez, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^{n} z^j = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

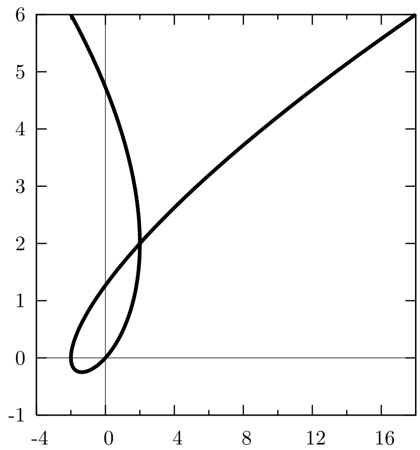
(b) Considérons les nombres complexes ω_j, avec $j = 1, \ldots, n$ solutions de l'équation $Z^n = 1$ où n est un entier $\geqslant 2$. Montrez que $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 0$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^3 - 3t, t^2 - t)$. Son image est dessinée ci-contre. Veuillez cocher la case adéquate pour chacune des affirmations suivantes :



(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $(0,0) \in \operatorname{Im} f$;

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $(2,0) \in \operatorname{Im} f$;

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ f est une fonction injective ;

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ f est une fonction surjective ;

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\operatorname{Im} f \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant -1/4\}$.

Justifiez ci-dessous chacun de vos choix, de manière graphique *et* analytique.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Soit le polynôme

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad \text{où } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \text{ et } a_n \neq 0.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrez que $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$. Détaillez et justifiez chaque étape de votre raisonnement.

Question 8. Déterminez les vecteurs $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux à la fois aux vecteurs $(1,2,3)$ et $(3,2,1)$. Décrivez l'objet géométrique formé par ces vecteurs $\mathbf{v}$.

Mathématique Élémentaire

Examen (16 août 2004)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-1/x} \sin \frac{1}{x}$$

Donnez tous les points $x \in \mathbb{R}$ tels que $\partial_x f(x) = 0$.

Question 10. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Prouvez la proposition suivante :

$$(\forall \varepsilon > 0,\ a \leqslant b + \varepsilon) \Rightarrow a \leqslant b$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11. Calculez, si possible, l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Mathématique Élémentaire

Examen (16 août 2004)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11 (suite). Résolvez le système

$$\begin{cases} x+2y=z+1 \\ 2x+4z=2-2y \\ 3z=x+3y \end{cases}$$

L'efficacité de la méthode utilisée est importante.

Question 12. Soient les deux matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définies par

$$A_{ij} = i - j, \qquad B_{ij} = i + j.$$

Considérons la matrice $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie par $C := AB$. Calculez $\operatorname{tr} C := \sum_{i=1}^{n} C_{ii}$.