

Test Introductif (Math. Élé. & Informatique)

Test n° 1

(15 septembre 2003)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Avant d'aller plus loin, inscrivez en lettres majuscules votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur toutes les feuilles.

De manière à pouvoir orienter au mieux les cours par la suite, pourriez-vous nous dire, durant les deux dernières années d'humanité :

- combien d'heures de mathématique par semaine vous avez suivies :
- dans quelle école (nom et ville) :
- avec quel professeur :
- si vous avez vu les nombres complexes : oui / non ;
- si vous avez vu le calcul matriciel : oui / non.

Veillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !
- La durée de ce test ne dépassera pas 90 minutes.

Question 1. Écrivez l'expression suivante sous forme d'une unique fraction :

$$\frac{a + \frac{1}{b}}{a + \frac{c}{d}} =$$

Question 2. L'identité suivante est-elle valable quel que soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{x}\sqrt{1+x} = \sqrt{x(1+x)}? \tag{1}$$

Si vous répondez par la négative, dites pour quels x (s'il y en a) l'égalité (1) est valide.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

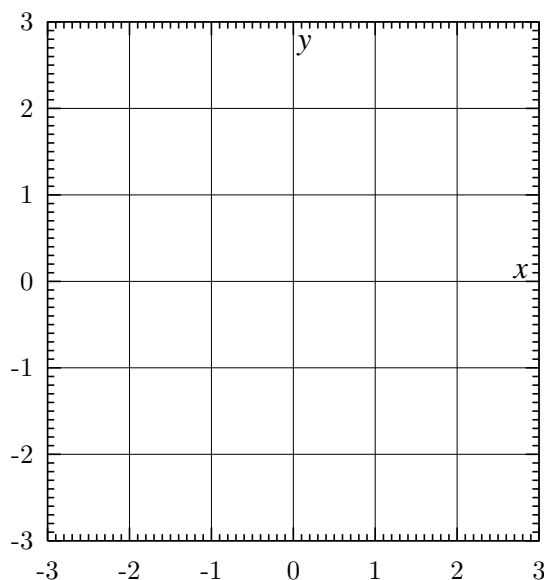
Question 3. Écrivez en bon français la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \Rightarrow x = 0$$

Question 4.

■ Tracez sur le graphique ci-dessous les droites suivantes :

$$D_1 \equiv x + y + 1 = 0, \quad D_2 \equiv y = 3x - 1, \quad D_3 \equiv x = 2.$$



■ Quand une droite D d'équation

$$D \equiv ax + by + c = 0.$$

est-elle verticale (resp. horizontale) ?

Question 5. Calculez les expressions suivantes (dans lesquelles ∂_x désigne la dérivation relative à la variable x souvent notée ' en secondaire, sans précision de variable) :

■ $\partial_x(x^2 + ax + 3) =$

■ $\partial_a(x^2 + ax + 3) =$

■ $\partial_x(\cos x) =$

■ $\int_0^1 x^2 dx =$

■ $\int_0^\pi \sin(x) dx =$

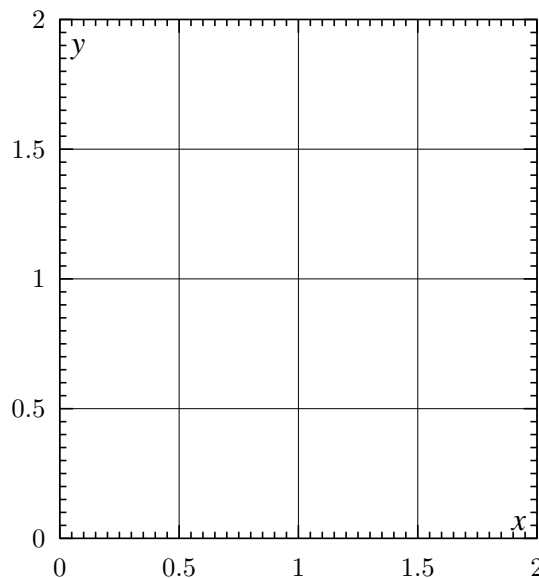
Question 6. Définissez la valeur absolue $|x|$ d'un nombre réel x :

$|x| =$

Question 7.

■ Lorsque $x > 0$ est petit, laquelle des deux quantités x^2 et x^3 est la plus petite ? Justifiez.

■ Esquissez le graphe des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ sur la figure ci-dessous.



Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 8. La formule *pulsation maximale du cœur* $= 208 - 0,7 \cdot \text{âge}$ est aussi utilisée pour déterminer lorsque l'entraînement physique est le plus efficace. Des recherches ont montré que c'est le cas lorsque le cœur bat à 80% de la vitesse maximale de pulsation.

Écrivez une formule qui donne, en fonction de l'âge, la vitesse de pulsation du cœur pour un entraînement efficace.

Question 9. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies (a et b sont des nombres réels) :

$\sqrt{a^2} = a$

$a^2 \leq |a|^2$

si $a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$

si $a^2 \leq b^2$, alors $a \leq b$

$|a + b| \leq |a| + |b|$

$\frac{|a|}{a} = 1$

$|a| \leq b$ si et seulement si $-b \leq a$ et $a \leq b$

$|\sin a| \leq 1$

$1/a \leq 1$

si $a \in]0, 1]$, alors $1/a \leq 1$

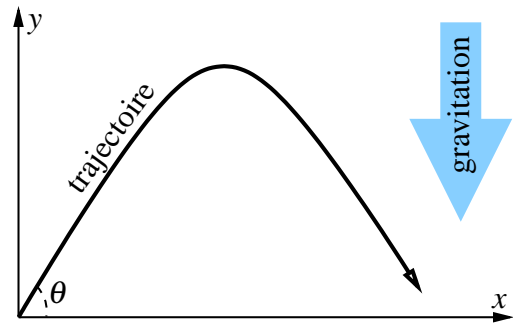
Question 10. Hier soir, en quittant le bureau, j'ai affirmé :

« s'il pleut demain, je prendrai mon parapluie ». (2)

Ce matin il ne pleuvait pas. J'ai pourtant emporté mon parapluie. Ai-je menti lorsque j'ai affirmé (2) ? Expliquez.

Question 11. Un projectile est lancé à partir du sol avec une vitesse $v > 0$ et un angle $\theta > 0$ par rapport à l'horizontale (voir figure ci-contre). Selon les lois de la mécanique, la position $(x(t), y(t))$ de ce projectile au temps t (considérant que le lancé a été effectué en $t = 0$) est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = v \cos(\theta)t \\ y(t) = v \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$



où $g \approx 9,81$ est la constante de gravitation terrestre. Donnez, en fonction de la vitesse de lancement v , l'angle θ qu'il faut adopter pour que le projectile retombe le plus loin possible. Justifiez votre réponse.

(INDICATION : Commencez par déterminer le temps t auquel le projectile touche le sol, calculez ensuite la distance parcourue et maximisez cette distance par rapport à θ . Vous pouvez bien entendu procéder autrement si vous le désirez.)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 12. Soit le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} a * x + b * y = c \\ d * x + e * y = f \end{cases}$$

où l'opérateur « * » représente la multiplication. Écrire un mode d'emploi pour la résolution de ce système par une « machine non intelligente » envisageant tous les cas particuliers et garantissant qu'on ne réalisera jamais aucune opération interdite.

La machine non intelligente dispose d'opérateurs qui lui permettent de réaliser les opérations élémentaires :

- addition ;
- soustraction ;
- multiplication ;
- division par un nombre non nul ;
- tester si une valeur est positive ;
- tester si une valeur est nulle.