Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 1 (15 septembre 2003)

Correction

Question 1. *Écrivez l'expression suivante sous forme d'une unique fraction :*

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{a+\frac{c}{d}} = \frac{(ab+1)d}{b(ad+c)}$$

Question 2. *L'identité suivante est-elle valable quel que soit $x \in \mathbb{R}$:*

$$\sqrt{x}\sqrt{1+x} = \sqrt{x(1+x)}\ ? \tag{1}$$

Si vous répondez par la négative, dites pour quels x (s'il y en a) l'égalité (1) *est valide.*

Cette identité n'est pas valable pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, pour tout réel $x < 0$, x n'appartient pas au domaine de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. Cette identité est valide quand les diverses racines ont un sens, à savoir quand $x \geqslant 0$, $1+x \geqslant 0$ et $x(1+x) \geqslant 0$. La troisième inégalité étant une conséquence des deux premières, il est équivalent de demander $x \geqslant 0$ et $x \geqslant -1$, ce qui revient à $x \geqslant 0$. En conclusion, (1) est vraie pour tous les $x \geqslant 0$.

Question 3. *Écrivez en bon français la formule*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\forall \varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon) \Rightarrow x = 0$$

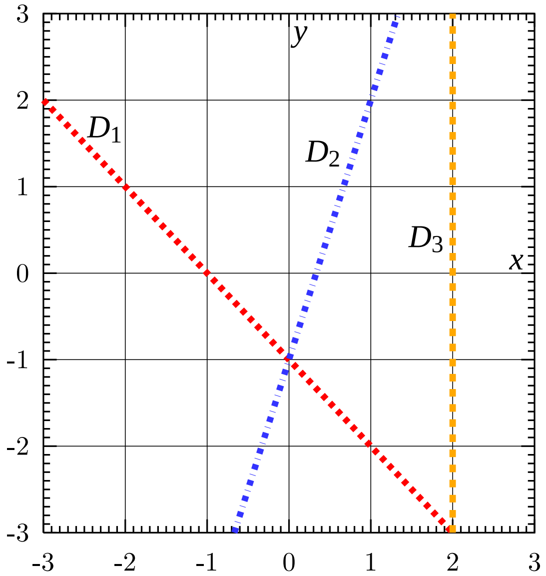
<u>Première formulation :</u> Soit x un élément quelconque de $\mathbb{R}$. Si pour tout élément ε de $\mathbb{R}$, la valeur absolue de x est inférieure à ε, alors x est nul.

<u>Deuxième formulation :</u> Un réel dont la valeur absolue est arbitrairement petite est nul.

Question 4.

- *Tracez sur le graphique ci-dessous les droites suivantes :*

$$D_1 \equiv x+y+1=0, \qquad D_2 \equiv y=3x-1, \qquad D_3 \equiv x=2.$$



- *Quand une droite D d'équation*

$$D \equiv ax+by+c=0.$$

est-elle verticale (resp. horizontale) ?

  – La droite D est verticale ssi $a \neq 0$ et $b=0$ puisque l'équation générale d'une droite verticale dans le plan réel est $x=d$ où $d \in \mathbb{R}$.

  – La droite D est horizontale ssi $a=0$ et $b \neq 0$ puisque l'équation générale d'une droite horizontale dans le plan réel est $y=d$ où $d \in \mathbb{R}$.

Question 5.

Calculez les expressions suivantes (dans lesquelles ∂_x désigne la dérivation relative à la variable x souvent notée $'$ en secondaire, sans précision de variable) :

- $\partial_x(x^2+ax+3) = 2x+a$
- $\partial_a(x^2+ax+3) = x$
- $\partial_x(\cos x) = -\sin x$
- $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1}{3}$
- $\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\cos x\right]_0^\pi = -\cos\pi+\cos 0 = -(-1)+1 = 2$

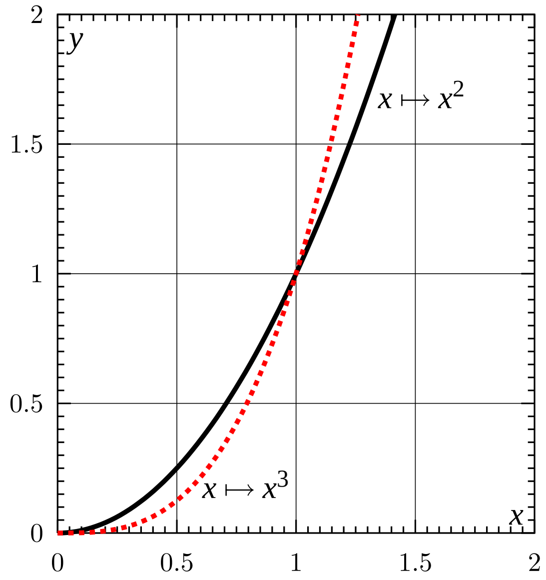
Question 6. *Définissez la valeur absolue $|x|$ d'un nombre réel x :*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Question 7.

- *Lorsque $x > 0$ est petit, laquelle des deux quantités x^2 et x^3 est la plus petite ? Justifiez.*

  x^3 est plus petit que x^2 lorsque $x < 1$. En effet, $x^3 = x^2 \cdot x < x^2$ puisque $x < 1$.
- *Esquissez le graphe des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ sur la figure ci-dessous.*



Question 8. *La formule* pulsation maximale du cœur $= 208 - 0{,}7 \cdot$ age *est aussi utilisée pour déterminer lorsque l'entraînement physique est le plus efficace. Des recherches ont montré que c'est le cas lorsque le cœur bat à 80% de la vitesse maximale de pulsation.*

Écrivez une formule qui donne, en fonction de l'âge, la vitesse de pulsation du cœur pour un entraînement efficace.

L'expression qui détermine que le coeur bat à 80 % de sa vitesse maximale est $\frac{8}{10} \cdot (208 - 0{,}7 \cdot \text{age}) = 166{,}4 - 0{,}56 \cdot \text{age}$.

Question 9. *Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies (a et b sont des nombres réels) :*

☐ $\sqrt{a^2} = a$

Il suffit de prendre $a = -1$ ce qui donne $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$. C'est vrai uniquement si $a \geqslant 0$. De manière générale, $\sqrt{a^2} = |a|$.

☑ $a^2 \leqslant |a|^2$

En fait on a même $a^2 = |a|^2$.

☐ *si $a \leqslant b$, alors $a^2 \leqslant b^2$*

Il suffit de prendre $a := -2 \leqslant b := -1$ pour contredire cette affirmation car $a^2 = 4 \nleqslant b^2 = 1$. Si $a \geqslant 0$ (et donc $b \geqslant 0$ aussi), c'est vrai.

☐ *si $a^2 \leqslant b^2$, alors $a \leqslant b$*

Il suffit de considérer $a := 1$ et $b := -1$. En effet, on a $a^2 = 1 \leqslant b^2 = 1$ bien que $a \nleqslant b$. Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, cette implication est vraie. De manière générale, on peut seulement dire que $a^2 \leqslant b^2 \Rightarrow |a| \leqslant |b|$

☑ $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

Il y a plusieurs manières de prouver cette inégalité. On peut par exemple utiliser le fait que, puisque les deux membres sont positifs, elle est équivalente à $|a+b|^2 \leqslant (|a| + |b|)^2$. Comme on l'a remarqué ci-dessus, $|c|^2 = c^2$, et donc l'inégalité devient

$$(a+b)^2 \leqslant (|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|a|\,|b| + |b|^2 = a^2 + 2|a|\,|b| + b^2$$

En développant $(a+b)^2$ et en simplifiant, on obtient $ab \leqslant |a|\,|b|$. Cette dernière inégalité est vraie car $|a|\,|b| = |ab|$ et, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant |x|$.

REMARQUE : Cette inégalité est fondamentale pour le cours d'Analyse où elle sera utilisée abondamment.

☐ $\dfrac{|a|}{a} = 1$

Cette égalité est mise en défaut par $a := -1$. Elle est vraie si et seulement si $a > 0$.

☑ $|a| \leqslant b$ *si et seulement si* $-b \leqslant a$ *et* $a \leqslant b$

$\Rightarrow$) Supposons que $|a| \leqslant b$. Commençons par remarquer que cela implique $b \geqslant 0$. Distinguons deux cas :

- Si $a \geqslant 0$, alors $|a| = a$ et l'hypothèse devient $a \leqslant b$. Dès lors $-b \leqslant 0 \leqslant a \leqslant b$ ce qui montre la thèse.
- Si $a \leqslant 0$, alors $|a| = -a$ et l'hypothèse devient $-a \leqslant b$ ou encore $a \geqslant -b$. Dès lors $-b \leqslant a \leqslant 0 \leqslant b$ ce qui prouve la thèse dans ce cas également.

$\Leftarrow$) Distinguons de nouveau deux cas.

- Si $a \geqslant 0$, alors $|a| = a$ qui sera $\leqslant b$ en vertu de l'hypothèse $a \leqslant b$.
- Si $a \leqslant 0$, alors $|a| = -a$ qui sera $\leqslant b$ en vertu de l'hypothèse $-b \leqslant a$.

☑ $|\sin a| \leqslant 1$

C'est une conséquence de la définition que vous avez vue (géométrique en général) du sinus.

☐ $1/a \leqslant 1$

Ça ne marche déjà pas pour $a = 1/2$! Il faut bien comprendre que a est un réel et donc pas nécessairement un entier ! Vous voyez donc qu'essayer avec quelques exemples (mal choisis) tels que $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$,... peut donc vous induire en erreur !

☐ *si* $a \in]0,1]$, *alors* $1/a \leqslant 1$

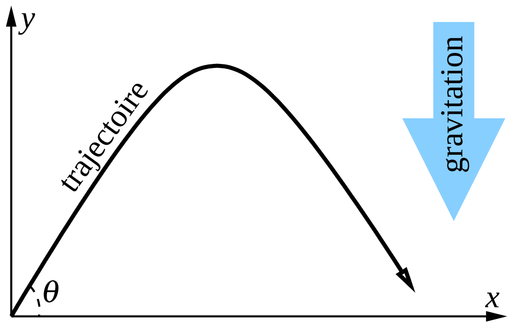
Même contre-exemple que ci-dessus. C'est en fait le « contraire » qui est vrai : $a \in]0,1] \Rightarrow 1/a \geqslant 1$

Question 10. *Hier soir, en quittant le bureau, j'ai affirmé :*

$$\text{« s'il pleut demain, je prendrai mon parapluie ».} \tag{2}$$

Ce matin il ne pleuvait pas. J'ai pourtant emporté mon parapluie. Ai-je menti lorsque j'ai affirmé (2) *? Expliquez.*

Non. Posons l'assertion (A) : « il pleut demain », et l'assertion (B) : « j'emporte mon parapluie ». Si (A) est faux alors (A) ⇒ (B) est vrai quelque soit la valeur de vérité de (B). Il suffit de se référer à la table de vérité d'une implication.



Question 11. *Un projectile est lancé à partir du sol avec une vitesse $v > 0$ et un angle $\theta > 0$ par rapport à l'horizontale (voir figure ci-contre). Selon les lois de la mécanique, la position $\big(x(t), y(t)\big)$ de ce projectile au temps t (considérant que le lancé a été effectué en $t = 0$) est donnée par*

$$\begin{cases} x(t) = v\cos(\theta)t \\ y(t) = v\sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

où $g \approx 9{,}81$ est la constante de gravitation terrestre. Donnez, en fonction de la vitesse de lancement v, l'angle θ qu'il faut adopter pour que le projectile retombe le plus loin possible. Justifiez votre réponse.

*(*Indication : *Commencez par déterminer le temps t auquel le projectile touche le sol, calculez ensuite la distance parcourue et maximisez cette distance par rapport à θ. Vous pouvez bien entendu procéder autrement si vous le désirez.)*

Soit t_f le temps où le projectile atteint le sol. Dès lors, $0 = y(t_f) = v\sin(\theta)t_f - \frac{1}{2}gt_f^2$. Puisque $t_f \neq 0$ (car $\theta \neq 0$), on obtient $t_f = 2\frac{v}{g}\sin\theta$.

Donc, on peut calculer la distance entre le point de lancée et le point de chute, $x(t_f)$, comme une fonction de θ : $D(\theta) = 2\frac{v^2}{g}\cos\theta \cdot \sin\theta$ (on a remplacé t_f dans la formule de $x(t)$ et regardé le résultat comme une fonction de θ). Comme $\sin(2\theta) = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$, on peut réécrire D comme

$$D(\theta) = \frac{v^2}{g}\sin(2\theta).$$

Le sinus atteint sa valeur maximale en $\pi/2$ plus un multiple entier de 2π. Donc, puisque $\theta \in]0, \pi/2]$, la valeur $2\theta = \pi/2$, c'est-à-dire $\theta = \pi/4$, maximise D. En résumé, l'angle $\theta = \pi/4$ maximise la distance parcourue par le projectile et ce quel que soit l'angle θ.