Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 2 (22 septembre 2003)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Résoudre le système

$$\begin{cases} 3mx + 3y = 1 \\ 3x + m^2 y = 0 \end{cases}$$

où $m \in \mathbb{R}$ (discuter en fonction de m).

Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 2 (22 septembre 2003)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$x^2+3x+7=0.$$

Cette équation a-t-elle des solutions dans $\mathbb{R}$?

Question 3.

(a) Calculez $1+\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}^2+\boldsymbol{i}^3$.

(b) Calculez $(3-\boldsymbol{i})^{-2}$.

(c) Donnez une formule pour $\boldsymbol{i}^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$, et prouvez-la.

Mathématique Élémentaire

Test n° 2 (22 septembre 2003)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4.

- Complétez la phrase suivante :

$$(x_0, y_0, z_0) = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{si et seulement si} \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

$$\exists \mu \in \mathbb{R}, \quad (1,0,1) = \mu(3,-6,9) + (0,2,-2)$$

Justifiez votre réponse.

Question 5.

- Parmi les phrases suivantes, cochez celle(s) qui tradui(sen)t la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x < y.$$

☐ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$.
☐ Il existe un $y \in \mathbb{R}$ strictement plus grand que n'importe quel nombre réel x.
☐ On peut toujours trouver un nombre réel strictement plus grand qu'un réel donné.

- Même question pour la formule

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ \forall x_1 \in \mathbb{R},\ \forall x_2 \in \mathbb{R}, \quad \big(ax_1 + b = 0 \wedge ax_2 + b = 0\big) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

☐ $x_1 = x_2$ est une solution du système

$$\begin{cases} ax_1 + b = 0 \\ ax_2 + b = 0 \end{cases}$$

☐ L'équation $ax + b = 0$ admet toujours au plus une solution.
☐ L'équation $ax + b = 0$ admet toujours une unique solution.

Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 2 (22 septembre 2003)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6.

- Montrez que $p \wedge (q \vee r)$ est équivalent à $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

- Soient p, q, r trois propositions qui dépendent d'une variable $\mu \in \mathbb{R}$. Niez la proposition

$$\exists \mu \in \mathbb{R},\ (p \wedge q) \Rightarrow \neg r.$$

Expliquez votre démarche.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Considérons les ensembles

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (-1,2)\cdot(x,y) = 0\},$$
$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists \mu \in \mathbb{R},\ (x,y) = (-2,-1) + \mu(2,1)\}.$$

Montrez que $A = B$. Justifiez en détail chaque étape de votre raisonnement.

Mathématique Élémentaire

Test n° 2 (22 septembre 2003)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 8.

(a) Prouver que la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$ satisfait l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

(b) Déduire du point (a) que la fonction d définie par

$$d(a,b) := |b-a| \qquad (\text{pour } a,b \in \mathbb{R})$$

vérifie l'inégalité triangulaire.

(c) Montrer que la fonction d, définie au point (b), vérifie les quatre propriétés nécessaires pour affirmer que d est une distance.

Informatique

Test n° 2 (22 septembre 2003)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Soit le nombre représenté par 5131 en base 10. Comment l'écrire en base 2, en base 8 et en base 16 ?