Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 2 (22 septembre 2003) **Correction**

Question 1. *Résoudre le système*

$$3mx + 3y = 1 \tag{1}$$
$$3x + m^2 y = 0 \tag{2}$$

où $m \in \mathbb{R}$ (discuter en fonction de m).

$(1) - m(2)$: $(3 - m^3)y = 1$. On est ramené à résoudre le système

$$(3 - m^3)y = 1 \tag{3}$$
$$3x + m^2 y = 0 \tag{4}$$

<u>Premier cas :</u> $3 - m^3 \neq 0$, c'est-à-dire $m \neq \sqrt[3]{3}$.
De (3), on déduit $y = 1/(3 - m^3)$ et en remplaçant dans (4), on a $x = -\frac{1}{3}m^2 y = -\frac{1}{3}m^2/(3 - m^3)$.
La solution du système est le couple $\left(\dfrac{-m^2}{3(3 - m^3)}, \dfrac{1}{3 - m^3}\right)$.

<u>Deuxième cas :</u> $m = \sqrt[3]{3}$. Alors, le système s'écrit

$$3\sqrt[3]{3}x + 3y = 1$$
$$3x + \sqrt[3]{9}y = 0$$

Les coefficients des inconnues x et y sont proportionnels mais cette proportion n'est pas respectée par les termes indépendants. Ce système est donc impossible.

Question 2. *Résoudre dans $\mathbb{C}$:*

$$x^2 + 3x + 7 = 0. \tag{5}$$

Cette équation a-t-elle des solutions dans $\mathbb{R}$?

Le discriminant de (5) vaut $\Delta = 9 - 28 = -19$. Les deux solutions complexes de $X^2 = \Delta$ valent $X_1 = \boldsymbol{i}\sqrt{19}$ et $X_2 = -\boldsymbol{i}\sqrt{19}$. Par conséquent, les deux solutions complexes de (5) sont

$$x_1 = \frac{-3 + X_1}{2} = \frac{-3 + \boldsymbol{i}\sqrt{19}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3 - X_2}{2} = \frac{-3 - \boldsymbol{i}\sqrt{19}}{2}.$$

Cette équation n'a pas de solution réelle car une solution réelle est une solution complexe et $x_1 \notin \mathbb{R}$, $x_2 \notin \mathbb{R}$. Alternativement, on sait que $\Delta < 0$ implique qu'il n'y a pas de solution réelle de (5).

Question 3.

(a) *Calculez* $1+\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}^2+\boldsymbol{i}^3 = 1+\boldsymbol{i}+(-1)+(-\boldsymbol{i}) = 0$.

(b) *Calculez* $(3-\boldsymbol{i})^{-2} = \big((3-\boldsymbol{i})^2\big)^{-1} = \big(2(4-3\boldsymbol{i})\big)^{-1} = \frac{1}{2}\big((4-3\boldsymbol{i})\big)^{-1} = \frac{1}{2}\frac{4+3\boldsymbol{i}}{25}$

où on a utilisé la formule vue au cours $(a+b\boldsymbol{i})^{-1} = \dfrac{a-b\boldsymbol{i}}{a^2+b^2}$.

(c) *Donnez une formule pour* $\boldsymbol{i}^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, *et prouvez-la.*

On a vu au cours que

$$\boldsymbol{i}^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \bmod 4 = 0 \\ \boldsymbol{i} & \text{si } n \bmod 4 = 1 \\ -1 & \text{si } n \bmod 4 = 2 \\ -\boldsymbol{i} & \text{si } n \bmod 4 = 3 \end{cases}$$

Or $\boldsymbol{i}^{-n} \cdot \boldsymbol{i}^n = \boldsymbol{i}^{-n+n} = \boldsymbol{i}^0 = 1$, c'est-à-dire que $\boldsymbol{i}^{-n}$ est l'inverse de $\boldsymbol{i}^n$. Par conséquent,

$$\boldsymbol{i}^{-n} = \begin{cases} 1^{-1} = 1 & \text{si } n \bmod 4 = 0 \\ \boldsymbol{i}^{-1} = -\boldsymbol{i} & \text{si } n \bmod 4 = 1 \\ (-1)^{-1} = -1 & \text{si } n \bmod 4 = 2 \\ (-\boldsymbol{i})^{-1} = \boldsymbol{i} & \text{si } n \bmod 4 = 3 \end{cases}$$

où les dernières égalités proviennent respectivement de $1 \cdot 1 = 1$, $\boldsymbol{i} \cdot (-\boldsymbol{i}) = 1$, $(-1)\cdot(-1) = 1$, $(-\boldsymbol{i}) \cdot \boldsymbol{i} = 1$ et de l'unicité de l'inverse.

Question 4.

- *Complétez la phrase suivante :*

$$(x_0, y_0, z_0) = (x_1, y_1, z_1) \quad \textit{si et seulement si} \quad (x_0 = x_1) \wedge (y_0 = y_1) \wedge (z_0 = z_1).$$

- *L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?*

$$\exists \mu \in \mathbb{R}, \quad (1,0,1) = \mu(3,-6,9) + (0,2,-2)$$

Justifiez votre réponse.

En utilisant les opérations dans $\mathbb{R}^3$, cela revient à chercher $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $(1,0,1)-(0,2,-2) = (3\mu, -6\mu, 9\mu)$, c'est-à-dire $(1,-2,3) = (3\mu, -6\mu, 9\mu)$. Par le point ci-dessus, l'égalité précédente signifie que

$$1 = 3\mu \quad \wedge \quad -2 = -6\mu \quad \wedge \quad 3 = 9\mu.$$

Donc $\mu = 1/3$ et l'affirmation proposée est vraie.

Question 5.

- *Parmi les phrases suivantes, cochez celle(s) qui tradui(sen)t la formule suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x < y.$$

  - [x] *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$.*
  - [ ] *Il existe un $y \in \mathbb{R}$ strictement plus grand que n'importe quel nombre réel x.*
  - [x] *On peut toujours trouver un nombre réel strictement plus grand qu'un réel donné.*

- *Même question pour la formule*

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ \forall x_1 \in \mathbb{R},\ \forall x_2 \in \mathbb{R},\quad \big(ax_1 + b = 0 \wedge ax_2 + b = 0\big) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

  - [ ] *$x_1 = x_2$ est une solution du système*

$$\begin{cases} ax_1 + b = 0 \\ ax_2 + b = 0 \end{cases}$$

  - [x] *L'équation $ax + b = 0$ admet toujours au plus une solution.*
  - [ ] *L'équation $ax + b = 0$ admet toujours une unique solution.*

Question 6.

- *Montrez que $p \wedge (q \vee r)$ est équivalent à $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.*

  Cela revient à prouver que la proposition

$$p \wedge (q \vee r) \iff \underbrace{(p \wedge q) \vee (p \wedge r)}_{A} \tag{6}$$

  est une tautologie.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	A	(6)
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

  On voit dès lors que (6) est une tautologie.

- *Soient p, q, r trois propositions qui dépendent d'une variable $\mu \in \mathbb{R}$. Niez la proposition*

$$\exists \mu \in \mathbb{R},\ (p \wedge q) \Rightarrow \neg r. \tag{7}$$

  Expliquez votre démarche.

  On a $\neg(\exists \mu \in \mathbb{R}, (p \wedge q) \Rightarrow \neg r)$ est équivalent à $\forall \mu \in \mathbb{R}, \neg\big((p \wedge q) \Rightarrow \neg r\big)$. De plus, la négation de $A \Rightarrow B$ est équivalente à $A \wedge \neg B$. La négation de (7) sera donc $\forall \mu \in \mathbb{R}$, $(p \wedge q) \wedge \neg(\neg r)$, c'est-à-dire $\forall \mu \in \mathbb{R}$, $(p \wedge q) \wedge r$.

Question 7. *Considérons les ensembles*

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (-1,2)\cdot(x,y) = 0\},$$
$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists \mu \in \mathbb{R},\ (x,y) = (-2,-1) + \mu(2,1)\}.$$

Montrez que $A = B$. Justifiez en détail chaque étape de votre raisonnement.

Montrer l'égalité $A = B$ revient à prouver les deux inclusions $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

($A \subseteq B$) Prenons $(x,y) \in A$, c'est-à-dire $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(-1,2)\cdot(x,y) = -x+2y = 0$, et montrons qu'il appartient à B, c'est-à-dire qu'on peut écrire

$$(x,y) - (-2,-1) + \mu(2,1)$$

pour un $\mu \in \mathbb{R}$ bien choisi. Posons $(x',y') := (x,y) - (-2,-1) = (x+2, y+1)$. On voit que l'équation $-x+2y = 0$ devient $0 = -(x'-2) + 2(y'-1) = -x'+2+2y'-2 = -x'+2y'$. En prenant $\mu = y'$, on a $(x',y') = (2y',y') = y'(2,1) = \mu(2,1)$, ou encore, vu la définition de (x',y'), $(x,y) - (-2,-1) = \mu(2,1)$. C'est ce qu'on voulait.

($B \subseteq A$) Prenons $(x,y) \in B$, c'est-à-dire un $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ qui s'écrit comme $(x,y) = (-2,-1) + \mu(2,1)$, et montrons que $(x,y) \in A$, c'est-à-dire que $(x,y)\cdot(-1,2) = 0$. C'est un simple calcul :

$$\begin{aligned}(x,y)\cdot(-1,2) &= \big((-2,-1) + \mu(2,1)\big)\cdot(-1,2)\\ &= (-2,-1)\cdot(-1,2) + \mu(2,1)\cdot(-1,2)\\ &= (2-2) + \mu(-2+2)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Question 8.

(a) *Prouver que la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$ satisfait l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Puisque les deux membres sont positifs, cela revient à prouver que $\big(|x+y|\big)^2 \leqslant \big(|x|+|y|\big)^2$. Le premier membre vaut $x^2+2xy+y^2$ et le second est $x^2+2|x|\,|y|+y^2$ et l'inégalité $xy \leqslant |x||y|$ est vraie.

(b) *Déduire du point (a) que la fonction d définie par*

$$d(a,b) := |b-a| \qquad \textit{(pour } a,b \in \mathbb{R}\textit{)}$$

vérifie l'inégalité triangulaire.

Il faut vérifier que pour $a,b,c \in \mathbb{R}$, on a $d(a,b) \leqslant d(a,c) + d(c,b)$, c'est-à-dire $|b-a| \leqslant |c-a| + |b-c|$. Il suffit de poser, dans l'inégalité triangulaire $x := c-a$ et $y := b-c$.

(c) *Montrer que la fonction d, définie au point (b), vérifie les quatre propriétés nécessaires pour affirmer que d est une distance.*

- On a toujours $d(a,b) \geqslant 0$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$ car une valeur absolue est positive ou nulle.
- On a $d(a,b) = 0$ ssi $|a-b| = 0$ ssi $b-a = 0$ ssi $b = a$.
- On a $d(a,b) = d(b,a)$ en utilisant le fait que $|x| = |-x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- On a vu au point (b) que la fonction d vérifie l'inégalité triangulaire.

En conclusion, d est une distance.