

Mathématique Élémentaire

Test n° 3

(29 septembre 2003)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit x et y les deux vecteurs de \mathbb{R}^N ($N \geq 2$) définis par

$$x = (1, 1, \dots, 1) \quad \text{et} \quad y = (1, 2, \dots, N).$$

- (a) Calculez $x \cdot y$ (le résultat doit être exprimé sous la forme d'un polynôme).
- (b) Prouvez par récurrence le résultat obtenu en (a).

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 2. Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Prouvez que, si le discriminant Δ est strictement négatif, alors les deux racines de cette équation sont conjuguées l'une de l'autre.

Question 3. Écrivez l'ensemble suivant sous la forme d'une union d'intervalles :

$$\{x \in \mathbb{R} : (x < 0 \text{ ou } x > 2) \text{ et } (x \leq -1 \text{ ou } x \geq 0)\}.$$

Question 4. Calculer $|(1 + 5i)^4|$, $|(1 - 5i)^4|$, $|1 - 5i|^2$.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 5. Quelle est la fonction du 1^{er} degré dont le graphe est la droite D passant par $(1, -2)$ et perpendiculaire à la droite D' dont une équation paramétrique est $(x, y) = (5, -3) + \lambda(-1, 4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$?

Question 6. Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

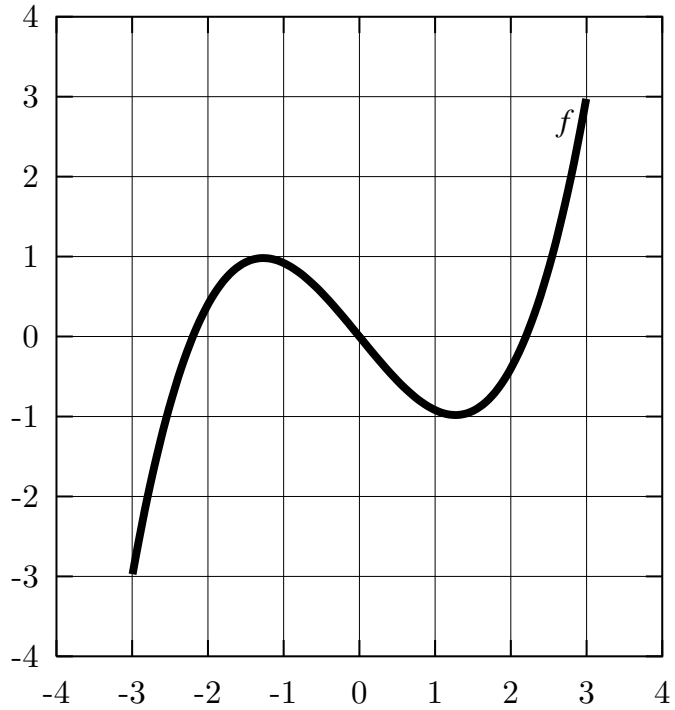
Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 7. Soit $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est représenté ci-contre. Tracez sur ce même dessin les graphes des fonctions g et h définies par

$$g(x) = |f(x)| - 2$$

$$h(x) = f(x - 1)$$

Expliquez votre démarche.



Question 8. Prouvez que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 9. Résolvez de manière géométrique et algébrique l'inéquation

$$|x| < 2 - |x - 1|.$$

Détaillez les différentes étapes de votre raisonnement.

Question 10. Soit u, v, w trois vecteurs de \mathbb{R}^3 de même norme $a > 0$. Supposons que les vecteurs u, v, w font deux à deux un angle de 60° . Calculez la norme du vecteur $u + v + w$.