Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 3 (29 septembre 2003)

Correction

Question 1. *Soit x et y les deux vecteurs de $\mathbb{R}^N$ ($N \geqslant 2$) définis par*

$$x = (1,1,\dots,1) \quad et \quad y = (1,2,\dots,N).$$

(a) *Calculez $x \cdot y$ (le résultat doit être exprimé sous la forme d'un polynôme).*

(b) *Prouvez par récurrence le résultat obtenu en (a).*

(a) $x \cdot y = (1,1,\dots,1)\cdot(1,2,\dots,N) = 1+2+\cdots+N = \frac{1}{2}N(N+1)$ (vu au cours).

(b) Prouvons que, pour $N \geqslant 2$, on a

$$(1,1,\dots,1)\cdot(1,2,\dots,N) = \tfrac{1}{2}N(N+1). \tag{1}$$

Cas de base : $N = 2$. Alors le premier membre de (1) est $(1,1)\cdot(1,2) = 1\cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$ et le deuxième membre de (1) est $\frac{1}{2}(2\cdot(2+1)) = 3$.

Supposons qu'on ait montré (1) pour $N \leqslant r$ (hypothèse de récurrence). Montrons (1) pour $N = r+1$. On a :

$$\begin{aligned}
(1,1,\dots,1)\cdot(1,2,\dots,r+1) &= 1+2+\cdots+r+(r+1) && \text{(définition du produit scalaire)}\\
&= \frac{r(r+1)}{2} + (r+1) && \text{(hypothèse de récurrence)}\\
&= (r+1)\cdot\frac{(r+2)}{2}
\end{aligned}$$

On a donc prouvé (1) pour tout $N \geqslant 2$.

Question 2. *Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Prouvez que, si le discriminant Δ est strictement négatif, alors les deux racines de cette équation sont conjuguées l'une de l'autre.*

Le discrimant étant négatif, les solutions sont données par $x_1 = (-b+y_1)/2a$ et $x_2 = (-b+y_2)/2a$ où y_1, y_2 sont les solutions de $Y^2 = \Delta$, c'est-à-dire $x_1 = -\frac{b}{2a} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $x_2 = -\frac{b}{2a} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$. Vu que b, a, $\sqrt{\Delta}$, 2 sont réels, $\bar{x}_1 = x_2$ et $\bar{x}_2 = x_1$.

Question 3. *Écrivez l'ensemble suivant sous la forme d'une union d'intervalles :*

$$E = \big\{x \in \mathbb{R} : (x < 0 \textit{ ou } x > 2) \textit{ et } (x \leqslant -1 \textit{ ou } x \geqslant 0)\big\}.$$

Grâce aux règles de distributivité, on peut écrire

$$\begin{aligned} E &= \big\{x \in \mathbb{R} : (x < 0 \text{ et } x \leqslant -1) \text{ ou } \underbrace{(x < 0 \text{ et } x \geqslant 0)}_{\text{toujours faux}} \text{ ou } \underbrace{(x > 2 \text{ et } x \leqslant -1)}_{\text{toujours faux}} \text{ ou } (x > 2 \text{ et } x \geqslant 0)\big\} \\ &= \big\{x \in \mathbb{R} : (x \leqslant -1) \text{ ou } (x > 2)\big\} =]-\infty, -1] \cup]2, +\infty[\end{aligned}$$

Question 4. *Calculer* $\left|(1+5\boldsymbol{i})^4\right|$, $\left|(1-5\boldsymbol{i})^4\right|$, $|1-5\boldsymbol{i}|^2$.

- $|1-5\boldsymbol{i}| = \sqrt{1+5^2} = \sqrt{26}$.
- $|1-5\boldsymbol{i}|^2 = \left(\sqrt{26}\right)^2 = 26$.
- $\left|(1-5\boldsymbol{i})^4\right| \overset{(*)}{=} |1-5\boldsymbol{i}|^4 = 26^2 = 676$ où $(*)$ utilise la propriété $|z|^n = |z^n|$.
- $\left|(1+5\boldsymbol{i})^4\right| \overset{(\dagger)}{=} |1-5\boldsymbol{i}|^4 = 26^2 = 676$ où $(\dagger)$ utilise la propriété $|z| = |\overline{z}|$.

Question 5. *Quelle est la fonction du 1^er^ degré dont le graphe est la droite D passant par* $(1,-2)$ *et perpendiculaire à la droite* D' *dont une équation paramétrique est* $(x,y) = (5,-3) + \lambda(-1,4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *?*

Un vecteur directeur de D' est $(-1,4)$. Puisque D et D' sont perpendiculaires, un vecteur directeur de D' sera un vecteur normal de D. Une équation cartésienne de D est donc de la forme $-x+4y = c$. Pour déterminer c, on exprime que le point $(1,-2)$ appartient à D. Alors $c = -1+4\cdot(-2) = -1-8 = -9$. Une équation cartésienne de D est $-x+4y = -9$, c'est-à-dire $4y = x-9$ ou encore $y = \frac{1}{4}x - \frac{9}{4}$. La fonction du premier degré dont le graphe est D est donc de la forme $f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{9}{4}$.

Question 6. *Démontrer par récurrence que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3.$$

- Le cas de base est $n = 1$. Dans ce cas, l'égalité à vérifier est $1^2 = 1^3$, ce qui est trivialement vrai.
- Supposons que l'égalité est vérifiée pour $n \leqslant r$ (où $r \geqslant 1$) et montrons que l'égalité est aussi vérifiée pour $n = r+1$ (et donc pour tous les autres $n \leqslant r+1$) :

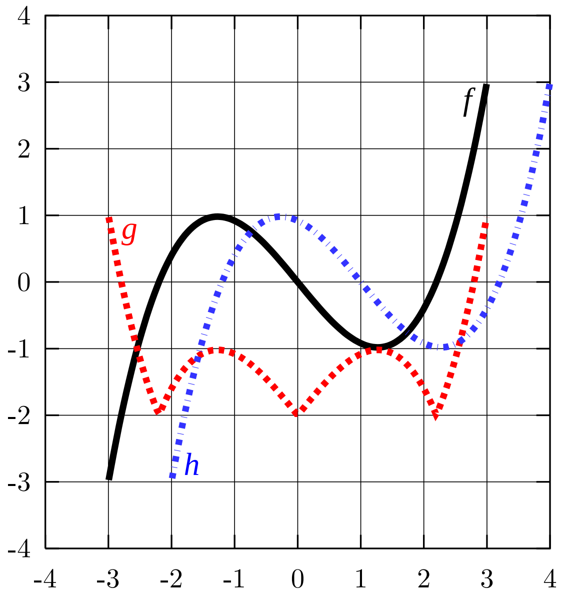
  $$\big(1+2+\cdots+(r+1)\big)^2 = (1+2+\cdots+r)^2 + 2(r+1)(1+2+\cdots+r) + (r+1)^2$$

  est égal, en utilisant l'hypothèse de récurrence pour $n = r$ et l'égalité $1+2+\cdots+r = \frac{1}{2}r(r+1)$, à $1^3+\cdots+r^3+(r+1)^2r+(r+1)^2 = 1^3+\cdots+(r+1)^2(r+1) = 1^3+\cdots+(r+1)^3$.

Question 7. *Soit $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est représenté ci-contre. Tracez sur ce même dessin les graphes des fonctions g et h définies par*

$$g(x) = |f(x)| - 2$$
$$h(x) = f(x-1)$$

Expliquez votre démarche.



Le graphe de h correspond à celui de f translaté de 1 unité vers la droite. Celui de g est celui de $|f|$ (obtenu en prenant le symétrique de la partie négative de f par rapport à l'axe des x et en ne changeant rien à la partie positive) translaté de 2 unités vers le bas.

Question 8. *Prouvez que* $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

Puisque les deux membres de l'inégalité sont des réels positifs, ce qui est demandé est équivalent à prouver que

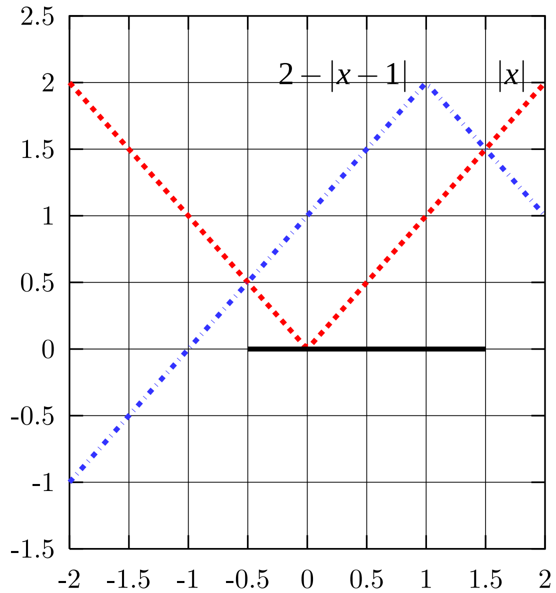
$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad |z_1 + z_2|^2 \leqslant \big(|z_1| + |z_2|\big)^2.$$

Posons $z_1 = a_1 + b_1\boldsymbol{i}$ et $z_2 = a_2 + b_2\boldsymbol{i}$, le premier membre devient $\big|(a_1+a_2) + (b_1+b_2)\boldsymbol{i}\big|^2$, c'est-à-dire $(a_1+a_2)^2 + (b_1+b_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2(a_1a_2 + b_1b_2)$. Le second membre est $|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$. On est donc ramené à prouver que $2(a_1a_2 + b_1b_2) \leqslant 2|z_1||z_2|$, ou encore que $a_1a_2 + b_1b_2 \leqslant |z_1||z_2| = \sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}$, c'est-à-dire que le produit scalaire des vecteurs (a_1, b_1) et (a_2, b_2) est inférieur ou égal au produit de leurs normes, ce qui est bien connu.

Question 9. *Résolvez de manière géométrique et algébrique l'inéquation*

$$|x| < 2 - |x-1|.$$

Détaillez les différentes étapes de votre raisonnement.



Le graphe de $|x|$ sera en dessous de celui de $2 - |x-1|$ pour les x dans l'intervalle $]-1/2, 3/2[$ (en gras sur le graphique ci-contre). Les points du bord de l'intervalle sont exclus car l'inégalité est stricte.

Algébriquement :

$$\begin{aligned}
|x| < 2 - |x-1| \quad &\text{ssi} \quad \big(x < 2 - |x-1|\big) \text{ et } \big(-2 + |x-1| < x\big)\\
&\text{ssi} \quad \big(|x-1| < 2 - x\big) \text{ et } \big(|x-1| < x+2\big)\\
&\text{ssi} \quad \big(x-1 < 2-x \text{ et } x-1 > x-2\big) \text{ et } \big(x-1 < x+2 \text{ et } x-1 > -x-2\big)\\
&\text{ssi} \quad \big(x < \tfrac{3}{2} \text{ et } \underbrace{-1 > -2}_{\text{vrai}}\big) \text{ et } \big(\underbrace{-1 < 2}_{\text{vrai}} \text{ et } x > -\tfrac{1}{2}\big)\\
&\text{ssi} \quad x < \tfrac{3}{2} \text{ et } x > -\tfrac{1}{2}\\
&\text{ssi} \quad x \in \left]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right[.
\end{aligned}$$

Question 10. *Soit u, v, w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de même norme $a > 0$. Supposons que les vecteurs u, v, w font deux à deux un angle de 60°. Calculez la norme du vecteur $u+v+w$.*

On a :

$$\begin{aligned}
\|u+v+w\| &= \sqrt{(u+v+w)\cdot(u+v+w)} && \text{car } \|x\| = \sqrt{x\cdot x} \text{ pour } x \in \mathbb{R}^3\\
&= \sqrt{u\cdot u + v\cdot v + w\cdot w + 2u\cdot v + 2v\cdot w + 2u\cdot w} && (2)
\end{aligned}$$

grâce à la distributivité et à la commutativité du produit scalaire.

Or, $u\cdot u = v\cdot v = w\cdot w = a^2$ car $x\cdot x = \|x\|^2$ pour $x \in \mathbb{R}^3$, et $u\cdot v = v\cdot w = u\cdot w = \frac{1}{2}a^2$ car $x\cdot y = \|x\|\,\|y\|\cos\theta$ pour $x, y \in \mathbb{R}^3$. Donc $(2) = \sqrt{3a^2+3a^2} = \sqrt{6a^2} = \sqrt{6}\,a$ (car $a > 0$).