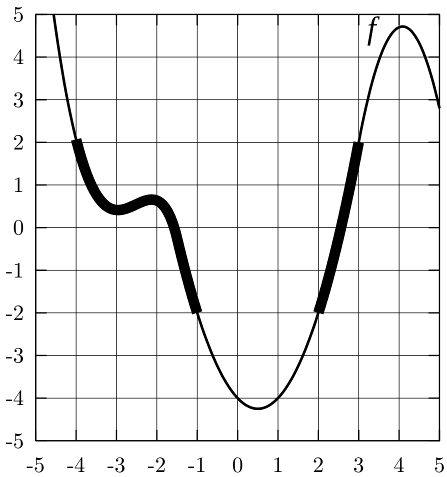
Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (6 octobre 2003)

Correction

Question 1. *Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le graphe est représenté ci-contre. Déterminez graphiquement l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $|f(x)| \leqslant 2$. Expliquez votre démarche.*



$x \in \mathbb{R}$ vérifie $|f(x)| \leqslant 2$ si et seulement si $-2 \leqslant f(x) \leqslant 2$. Les points x qui nous intéressent ont donc leurs images entre -2 et 2, c'est-à-dire que ce sont les points $(x, f(x))$ du graphe de f situés entre les deux droites $y = -2$ et $y = 2$. La partie du graphe entre ces deux droites a été mise en gras. Les abcisses x correspondantes sont celles entre -4 et -1 d'une part, 2 et 3 d'autre part. Donc $|f(x)| \leqslant 2 \Leftrightarrow x \in [-4, -1] \cup [2, 3]$.

Question 2. *Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction*

$$f_\alpha(x) := 4x^2 + 5\alpha x + \alpha^2 \tag{1}$$

possède-t-elle deux racines x_1 et x_2 telles que $x_1 < -1 < x_2$. Exprimez votre réponse sous la forme d'un intervalle.

Montrons

$$\big(f_\alpha \text{ possède deux racines } x_1 < -1 < x_2\big) \Leftrightarrow f(-1) < 0.$$

($\Rightarrow$) Comme le coefficient de x^2 est > 0, les valeurs de f_α seront < 0 entre les racines (exclues). Vu que $-1 \in \,]x_1, x_2[$ par hypothèse, on a le résultat.

($\Leftarrow$) Comme le coefficient de x^2 est > 0, f_α est > 0 pour $|x|$ grand (x positif ou négatif). Vu que $f(-1) < 0$ et que $f_\alpha(x) > 0$ pour x grand, il existe un $x_2 > -1$ tel que $f(x_2) = 0$. Un raisonnement similaire en allant vers $-\infty$ montre qu'il existe $x_1 < -1$ tel que $f(x_1) = 0$. $\square$

Au vu de (1), on a

$$f(-1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 - 5\alpha + 4 < 0.$$

Comme le coefficient de α^2 est > 0, la fonction $g(\alpha) := \alpha^2 - 5\alpha + 4$ sera < 0 entre ses racines (exclues). Les racines de $\alpha^2 - 5\alpha + 4 = 0$ étant

$$\alpha_1 = 1 \text{ et } \alpha_2 = 4,$$

on trouve que $\alpha^2 - 5\alpha + 4 < 0 \Leftrightarrow \alpha \in \,]1, 4[$. En conclusion

$$f_\alpha \text{ possède deux racines de part et d'autre de } -1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \,]1, 4[.$$

Question 3. *Donnez la représentation trigonométrique des nombres complexes suivants :*

$$\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\frac{\pi}{3})+\boldsymbol{i}\sin(\frac{\pi}{3})$$
$$\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \cos(\frac{2\pi}{3})+\boldsymbol{i}\sin(\frac{2\pi}{3})$$
$$\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 = \cos(\frac{6\pi}{3})+\boldsymbol{i}\sin(\frac{6\pi}{3}) = \cos(0)+\boldsymbol{i}\sin(0)$$
$$\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^7 = \cos(\frac{7\pi}{3})+\boldsymbol{i}\sin(\frac{7\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3})+\boldsymbol{i}\sin(\frac{\pi}{3})$$
$$\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{11} = \cos(\frac{11\pi}{3})+\boldsymbol{i}\sin(\frac{11\pi}{3}) = \cos(\frac{5\pi}{3})+\boldsymbol{i}\sin(\frac{5\pi}{3})$$

Expliquez votre démarche.

$\left|\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$, c'est donc un nombre complexe sur le cercle trigonométrique, $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont respectivement des valeurs de $\cos(\frac{\pi}{3})$ et $\sin(\frac{\pi}{3})$. On a vu que si $z = \rho\left(\cos(\theta)+\boldsymbol{i}\sin(\theta)\right)$, alors

$$z^n = \rho\left(\cos(n\theta)+\boldsymbol{i}\sin(n\theta)\right) \tag{2}$$

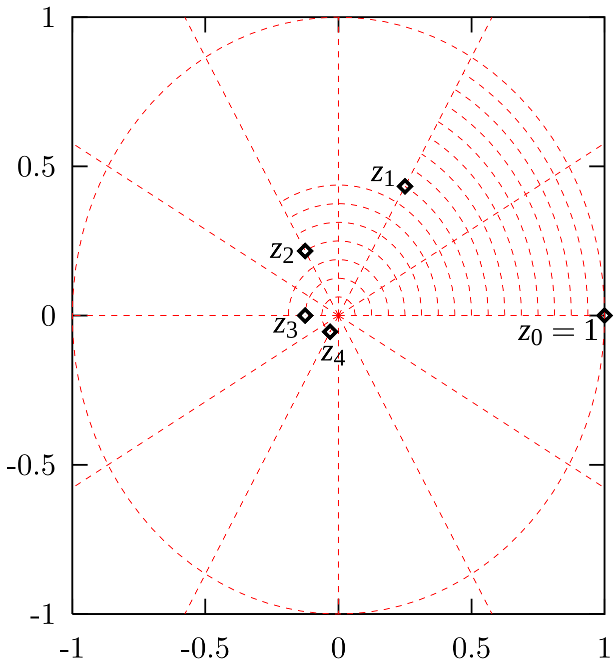
Par conséquent, les puissance de $\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont également sur le cercle trigonométrique. En appliquant (2) et en n'oubliant pas que, par définition, la forme trigonométrique demande de fournir un angle dans $[0, 2\pi[$, on obtient les réponses ci-dessus.

Question 4. *Représentez dans le plan complexe les nombres*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Expliquez votre démarche.

On a vu (question précédente) que $z_n := \left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \cos(\frac{n\pi}{3})+\boldsymbol{i}\sin(\frac{n\pi}{3})$ et qu'ils sont de module 1. D'autre part, le module de $(1/2)^n$ est $(\frac{1}{2})^n \leqslant 1$ quand $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent (vu $|zz'| = |z|\,|z'|$), le module des complexes à représenter est $\leqslant 1$. Ceci justifie de choisir, pour le cercle trigonométrique, le cercle le plus extérieur.

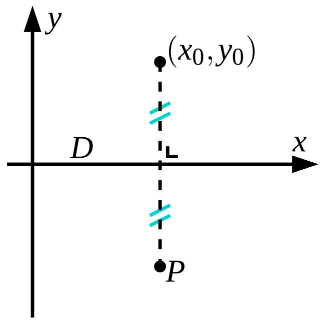


Question 5.

(a) *Soit D la droite « axe des x ». Donnez une équation cartésienne de D.*

$$D \equiv y = 0.$$

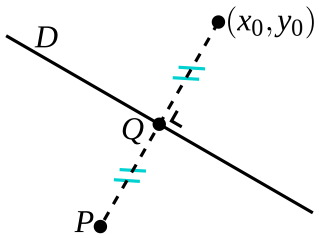
Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Sans aucun calcul, donnez les coordonnées du point P qui est le symétrique orthogonal de (x_0, y_0) par rapport à D (voir la figure ci-contre) :



$$P = (x_0, -y_0)$$

En effet, la coordonnée x ne change pas tandis que celle en y est « renversée » par rapport à l'axe des x, i.e., de même amplitude mais de signe opposé.

(b) *On considère la droite D d'équation*



$$D \equiv ax + by = c$$

où $(a,b) \neq (0,0)$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Recherchez les coordonnées du point P qui est le symétrique orthogonal *de (x_0, y_0) par rapport à D (voir la figure ci-contre).*
INDICATION : *Le point Q est le point de D situé à égale distance de (x_0, y_0) et de P.*

Posons $P = (x^*, y^*)$. La droite D' joignant P à (x_0, y_0) est perpendiculaire à D. Puisque la pente de D est $-a/b$, la pente de D' sera b/a. Nous avons donc

$$\frac{y^* - y_0}{x^* - x_0} = \frac{b}{a}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad y^* = y_0 + \frac{b}{a}(x^* - x_0) \tag{3}$$

Exprimons ensuite que le point Q se situe au milieu du segment joignant P à (x_0, y_0). Ainsi

$$Q = \left(\frac{x^* + x_0}{2}, \frac{y^* + y_0}{2}\right).$$

Comme Q appartient à D, l'équation suivante doit être vérifiée :

$$a\left(\frac{x^* + x_0}{2}\right) + b\left(\frac{y^* + y_0}{2}\right) = c \tag{4}$$

Pour trouver le coordonnées de P, il faut donc résoudre le système

$$\begin{cases} -bx^* + ay^* = ay_0 - bx_0 & \text{((3) multipliée par } a\text{)} \\ ax^* + by^* = 2c - ax_0 - by_0 \end{cases}$$

Par la méthode de Cramer, on trouve

$$x^* = \frac{\begin{vmatrix} ay_0 - bx_0 & a \\ 2c - ax_0 - by_0 & b \end{vmatrix}}{-(a^2 + b^2)} = \frac{(a^2 - b^2)x_0 + 2aby_0 - 2ac}{-(a^2 + b^2)},$$

$$y^* = \frac{\begin{vmatrix} -b & ay_0 - bx_0 \\ a & 2c - ax_0 - by_0 \end{vmatrix}}{-(a^2 + b^2)} = \frac{(b^2 - a^2)y_0 + 2abx_0 - 2bc}{-(a^2 + b^2)}$$

REMARQUE : Il faudrait traiter les cas $a=0$ et $b=0$ séparément vu que le raisonnement précédent les fait intervenir au dénominateur de fractions. La réponse finale reste valable tant que $(a,b)\neq(0,0)$. On peut aussi trouver la même réponse en employant une équation paramétrique de D', ce qui évite de devoir discuter en fonction de a et b comme on aurait dû le faire ci-dessus.

(c) *En partant du résultat général obtenu en (b), retrouvez celui de (a).*

Pour retrouver (a), il suffit de prendre $a=0$, $b=1$ et $c=0$. Alors $D\equiv y=0$ et on retrouve $P=(x^*,y^*)=(x_0,-y_0)$.

Question 6. *Déterminez la fonction du second degré $f(x)=ax^2+bx+c$ dont le graphe passe par les trois points $(-2,5)$, $(0,1)$ et $(1,1)$.*

Le fait que les trois points appartiennent au graphe de f se traduit par les trois équations $f(-2)=5$, $f(0)=1$ et $f(1)=1$. En utilisant le fait que $f(x)=ax^2+bx+c$, on obtient les équations :

$$\begin{cases} 4a-2b+c=5 \\ c=1 \\ a+b+c=1 \end{cases}$$

On sait donc déjà que $c=1$ et il reste à résoudre

$$\begin{cases} 4a-2b=5-c=4 \\ a+b=1-c=0 \end{cases} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En ajoutant 2 fois la seconde ligne à la première, on trouve

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{cases} a=4/6=2/3 \\ b=-a=-2/3 \end{cases}$$

La fonction recherchée est donc $f(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x+1$.

Question 7. *Soit le plan π d'équation*

$$\pi\equiv 4x+2y-z=1$$

et P le point de coordonnées $(0,-2,3)$. Donnez une équation paramétrique de la droite D passant par P et perpendiculaire à π. Déterminez ensuite le point d'intersection de D avec π.

On sait déjà que le point $P=(0,-2,3)$ appartient à D. D'autre part, puisque le plan π est perpendiculaire à D, un vecteur normal de π sera un vecteur directeur de D. Un tel vecteur se lit sur l'équation de π. Il s'agit du vecteur $(4,2,-1)$. Une équation paramétrique de D sera donc

$$(x,y,z)=(0,-2,3)+\lambda(4,2,-1), \quad \lambda\in\mathbb{R},$$

càd

$$\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Soit (x_0, y_0, z_0) le point d'intersection de D avec π. Le problème consiste à déterminer pour quelle valeur de λ le point (x_0, y_0, z_0) de D appartient également à π. Autrement dit, on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$4(4\lambda) + 2(-2 + 2\lambda) - (3 - \lambda) = 1,$$

càd $21\lambda = 8$, ou encore $\lambda = 8/21$. Ainsi $x_0 = 4 \cdot \frac{8}{21} = \frac{32}{21}$, $y_0 = -2 + 2\frac{8}{21} = -\frac{26}{21}$ et $z_0 = 3 - \frac{8}{21} = \frac{55}{21}$. En conclusion, le point d'intersection de D avec π est $(\frac{32}{21}, -\frac{26}{21}, \frac{55}{21})$.