

# Mathématique Élémentaire

Test n° 5

(13 octobre 2003)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur. Des expressions telles que « on voit bien que... » ne sont *pas* des justifications.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $Z^4 = -1$ .

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Soit  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Montrez par récurrence que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}.$$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 3. Calculez les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation

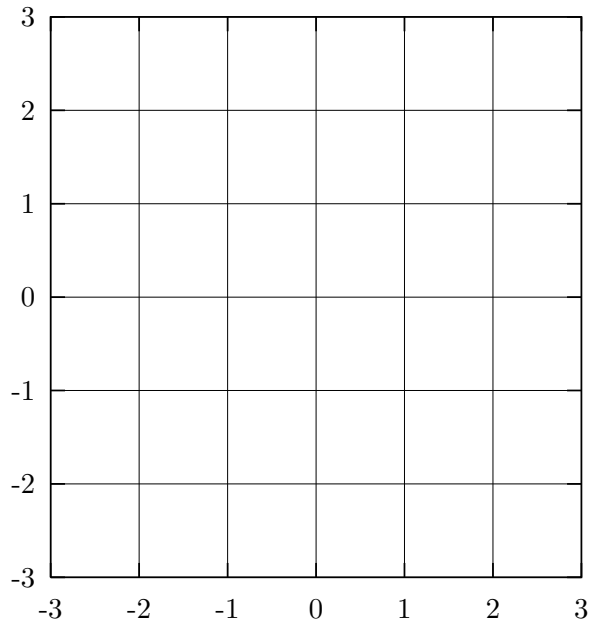
$$Z^2 - 4Z + (4 + 2i) = 0.$$

Question 4. Soit  $(E, d)$  un espace métrique (c'est-à-dire que  $d$  est une distance sur  $E$ ),  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$  et  $B \in E$ . Écrire la définition de « la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $B$  ». En donner une traduction en français correct.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5. On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$ .

- En calculant la valeur de  $f$  en quelques points, esquissez sur le graphe ci-contre l'image de  $f$ .



- Parmi les affirmations suivantes, cochez celles(s) qui est(sont) vraie(s).

- $\text{Im } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$  ;
- $\text{Im } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  ;
- $\text{Im } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$  ;
- $\text{Im } f = \{t \in \mathbb{R} : f(t) \in \mathbb{R}^2\}$ .

Veillez prouver ci-dessous chacune des affirmations dont vous avez affirmé la véracité.

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

**Question 6.** Prouvez que, si  $\xi_1, \dots, \xi_n$  sont les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $Z^n = 1$  et si  $u$  est une solution de l'équation  $Z^n = z_0$  où  $z_0 \in \mathbb{C}$ , alors  $u\xi_1, \dots, u\xi_n$  sont des solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $Z^n = z_0$ .

**Question 7.** Pour chacune des relations suivantes, dites s'il s'agit d'une fonction et, le cas échéant, donnez son domaine.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (y \text{ tel que } y^2 = x)$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto (y \text{ tel que } y^2 = x)$$

$$h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : m \mapsto (a \text{ qui est l'exposant de } 2 \text{ dans la décomposition de } m \text{ en facteurs premiers})$$

$$k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} : (a, b) \mapsto a + bi$$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 8. Soit  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  une matrice de type  $n \times n$ . On définit la trace de  $A$ , notée  $\text{tr}A$ , par

$$\text{tr}A := \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

(a) Calculez  $\text{tr}(A \cdot A^t)$  où  $A^t$  désigne la transposée de  $A$ .

(b) Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} \pi - ij & \text{si } i \leq j \\ (-1)^{i+j} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculez la trace de  $A$ .

# Informatique

Test n° 5 (13 octobre 2003)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9. (Recherche des pics dans un vecteur) Dans un vecteur, on appellera *pic* un élément dont la valeur est supérieure à celle de ses 2 voisins (le premier et le dernier élément ne seront jamais des pics). Soit le programme suivant qui compte le nombre de pics présents dans le vecteur `liste` :

```
main()
{
    int liste[50], n, borne, compteur;
    <initialisation du tableau liste>
    <initialisation de n, de borne, de increment et de compteur>
    while (n < borne) {
        if (<il y a un pic en position n>)
            compteur = compteur + 1;
        n = n + increment;
    }
    <imprimer la valeur de compteur>
}
```

(a) À quelle valeur faut-il initialiser `n`, `borne`, `increment` et `compteur` ?

(b) Par quoi faut-il remplacer `<il y a un pic en position n>` pour obtenir le résultat souhaité ?