Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 5 (13 octobre 2003)

Correction

Question 1. *Calculez les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^4 = -1$.*

On a vu que les solutions de $Z^n = z_0$ où $z_0 = \rho(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$ sont de la forme

$$\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + \boldsymbol{i}\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right) \quad \text{avec } k \in \{0,\dots,n-1\}.$$

Ici, $n = 4$, $-1 = 1(\cos\pi + \boldsymbol{i}\sin\pi)$, on obtient donc que les 4 racines de l'équation sont :

$$\cos\frac{\pi}{4} + \boldsymbol{i}\sin\frac{\pi}{4}, \quad \cos\frac{3\pi}{4} + \boldsymbol{i}\sin\frac{3\pi}{4}, \quad \cos\frac{5\pi}{4} + \boldsymbol{i}\sin\frac{5\pi}{4}, \quad \cos\frac{7\pi}{4} + \boldsymbol{i}\sin\frac{7\pi}{4}$$

ou encore

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Question 2. *Soit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matrice définie par*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Montrez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}.$$

Rappelons les formules trigonométriques qui nous seront utiles :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - \sin(a)\cdot\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot\sin(b)$$

- Cas de base : montrons la propriété pour $n = 1$. Dans ce cas,

$$A^n = A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Supposons que la propriété est vraie pour $n = i$, c'est-à-dire

$$A^i = \begin{pmatrix} \cos i\theta & -\sin i\theta \\ \sin i\theta & \cos i\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

et montrons que la propriété est vérifiée pour $n = i+1$, c'est-à-dire

$$A^{i+1} = \begin{pmatrix} \cos(i+1)\theta & -\sin(i+1)\theta \\ \sin(i+1)\theta & \cos(i+1)\theta \end{pmatrix}$$

Or,

$$\begin{aligned}
A^{i+1} &= A^i \cdot A && \text{(par les règles des exposants)} \\
&= \begin{pmatrix} \cos i\theta & -\sin i\theta \\ \sin i\theta & \cos i\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} && \text{(par hypothèse de récurrence (1))} \\
&= \begin{pmatrix} \cos i\theta \cdot \cos\theta - \sin i\theta \cdot \sin\theta & \cos i\theta \cdot (-\sin i\theta) - \sin i\theta \cdot \cos\theta \\ \sin i\theta \cdot \cos\theta + \cos i\theta \cdot \sin\theta & \sin i\theta \cdot (-\sin\theta) + \cos i\theta \cdot \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(i\theta+\theta) & -\sin(i\theta+\theta) \\ \sin(i\theta+\theta) & \cos(i\theta+\theta) \end{pmatrix} && \text{(voir les formules rappelées)} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(i+1)\theta & -\sin(i+1)\theta \\ \sin(i+1)\theta & \cos(i+1)\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc prouvé (1) pour tout $n \geqslant 1$.

Question 3. *Calculez les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation*

$$Z^2 - 4Z + (4 + 2\boldsymbol{i}) = 0.$$

Le discriminant Δ est $16 - 4(4+2\boldsymbol{i}) = -8\boldsymbol{i}$. Les solutions de l'équation sont données par la formule usuelle $x_1 = \frac{4+y_1}{2}$ et $x_2 = \frac{4+y_2}{2}$ où y_1, y_2 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de $Y^2 = \Delta = -8\boldsymbol{i} = 4(-2\boldsymbol{i})$. Puisque $y_1 = 2(1-\boldsymbol{i})$ et $y_2 = -2(1-\boldsymbol{i})$, on obtient $x_1 = 3 - \boldsymbol{i}$ et $x_2 = 1 + \boldsymbol{i}$. Pour résoudre $Y^2 = 4(-2\boldsymbol{i})$, on a résolu $Y^2 = 4$ et $Y^2 = -2\boldsymbol{i}$ et pour cette dernière équation, on a utilisé la méthode de la question 1.

Question 4. *Soit (E,d) un espace métrique (c'est-à-dire que d est une distance sur E), $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $B \in E$. Écrire la définition de « la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers B ». En donner une traduction en français correct.*

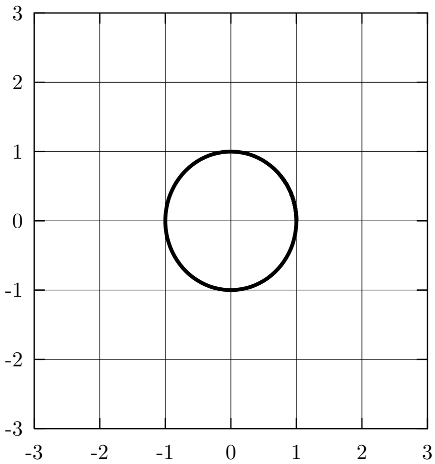
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \quad d(A_n, B) \leqslant \varepsilon$$

Pour tout seuil fixé $\varepsilon > 0$, il existe une borne n_0 à partir de laquelle la distance entre A_n et B est inférieure au seuil ε.

Question 5. *On considère la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

- *En calculant la valeur de f en quelques points, esquissez sur le graphe ci-contre l'image de f.*

t	$f(t)$
0	$(1,0)$
$\pi/2$	$(0,1)$
π	$(-1,0)$
$3\pi/2$	$(0,-1)$
$\pi/4$	$\big(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\big)$
$\pi/3$	$\big(1/2, \sqrt{3}/2\big)$



- *Parmi les affirmations suivantes, cochez celles(s) qui est(sont) vraie(s).*

  ☐ $\operatorname{Im} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$;
  ✔ $\operatorname{Im} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;
  ☐ $\operatorname{Im} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$;
  ☐ $\operatorname{Im} f = \{t \in \mathbb{R} : f(t) \in \mathbb{R}^2\}$.

Veuillez prouver ci-dessous chacune des affirmations dont vous avez affirmé la véracité.

Par définition,

$$\operatorname{Im} f = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; \exists t \in \mathbb{R},\ (x,y) = f(t)\big\}.$$

Il faut montrer l'égalité de cet ensemble avec

$$A := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x^2 + y^2 = 1\big\}.$$

($\operatorname{Im} f \subseteq A$) En effet, si $(x,y) \in \operatorname{Im} f$, on peut écrire $(x,y) = f(t) = (\cos t, \sin t)$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$. Dès lors $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, ce qui montre que $(x,y) \in A$.

($A \subseteq \operatorname{Im} f$) Soit $(x,y) \in A$. On considère le nombre complexe $z := x + \boldsymbol{i}y$. Comme $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, on a vu au cours que $z = \cos t + \boldsymbol{i} \sin t$ pour un certain $t \in [0, 2\pi[$. Donc $x + \boldsymbol{i}y = \cos t + \boldsymbol{i} \sin t$, c'est-à-dire $x = \cos t$ et $y = \sin t$, ou encore $(x,y) = (\cos t, \sin t) = f(t)$, pour un $t \in \mathbb{R}$. Donc $(x,y) \in \operatorname{Im} f$.

Question 6. *Prouvez que, si $\xi_1, \dots, \xi_n$ sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^n = 1$ et si u est une solution de l'équation $Z^n = z_0$ où $z_0 \in \mathbb{C}$, alors $u\xi_1, \dots, u\xi_n$ sont des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^n = z_0$.*

Il suffit de vérifier que $(u\xi_i)^n = z_0$ pour $i = 1, \dots, n$. On a $(u\xi_i)^n = u^n \xi_i^n$ (car $\cdot_{\mathbb{C}}$ est commutative) qui, au vu des hypothèses, est égal à $z_0 \cdot 1 = z_0$.

Question 7. *Pour chacune des relations suivantes, dites s'il s'agit d'une fonction et, le cas échéant, donnez son domaine.*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (y \textit{ tel que } y^2 = x)$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto (y \textit{ tel que } y^2 = x)$$
$$h : \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{N} : m \mapsto (a \textit{ qui est l'exposant de } 2 \textit{ dans la décomposition de } m \textit{ en facteurs premiers})$$
$$k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} : (a,b) \mapsto a + b\boldsymbol{i}$$

- f n'est pas une fonction.
  En effet, pour $x = 1$ (par exemple), il y a deux y qui vérifient $y^2 = x$, à savoir $y = 1$ et $y = -1$.
- g est une fonction,
  car pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe au plus un $y \in \mathbb{R}^+$ tel que $y^2 = x$, a savoir $y = \sqrt{x}$ si $x \geqslant 0$ et aucun si $x < 0$. Vu ce qu'on vient de dire $\operatorname{Dom} g = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \text{ existe}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\} = \mathbb{R}^+$.
- h est une fonction,
  car tout nombre $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ possède une unique décomposition en facteurs premiers. Comme $h(m)$ est défini quel que soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on a $\operatorname{Dom} h = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
- k est une fonction,
  car $a + b\boldsymbol{i}$ est univoquement déterminé par la connaissance de (a,b). De plus $a + b\boldsymbol{i}$ a un sens quel que soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, donc $\operatorname{Dom} k = \mathbb{R}^2$.

Question 8. *Soit* $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ *une matrice de type* $n \times n$*. On définit la trace de* A*, notée* $\operatorname{tr} A$*, par*

$$\operatorname{tr} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(a) *Calculez* $\operatorname{tr}(A \cdot A^t)$ *où* A^t *désigne la transposée de* A*.*

(b) *Soit* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *la matrice définie par*

$$a_{ij} = \begin{cases} \pi - ij & \textit{si } i \leqslant j \\ (-1)^{i+j} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Calculez la trace de A*.*

(a) On a :

$$\operatorname{tr}(A \cdot A^t) = \sum_{i=1}^{n} (A \cdot A^t)_{ii} \tag{2}$$

Or,

$$(A \cdot A^t)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} a^t_{ki} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a^2_{ik} = a^2_{i1} + a^2_{i2} + \cdots + a^2_{in}$$

Donc (2) s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2)=a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2+a_{21}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{2n}^2+\cdots+a_{n1}^2+a_{n2}^2+\cdots+a_{nn}^2$$

On retrouve la somme des carrés de tous les éléments de A

(b)

$$\operatorname{tr}A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\pi-i^2=\sum_{i=1}^{n}\pi-\sum_{i=1}^{n}i^2=n\pi-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$