

Mathématique Élémentaire

Test n° 6

(20 octobre 2003)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur. Des expressions telles que « on voit bien que... » ne sont *pas* des justifications.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez

■ $\sum_{i=-2}^{i^2+1} (i+3) =$

■ $\sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^n (j+1-\ell) =$

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 2. Échelonnez la matrice suivante en discutant en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 3. Esquissez les graphes des fonctions suivantes. Expliquez brièvement les principales étapes qui mènent à vos graphiques.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{-|x|}, \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - x^2, \quad h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2} + 1.$$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4.

(a) Prouvez par récurrence que

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

(b) Soit $i \in \mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$. Calculez (en utilisant le point précédent) :

$$\sum_{n=0}^t \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}^n$$

Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (20 octobre 2003)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5. Soit les nombres $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

- Mettez z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

- Considérons la matrice $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 \\ 1 & z_2 & z_1 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculez A^2 .
- (b) Déduisez du point (a) la matrice A^{-1} .

Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (20 octobre 2003)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 2^j & \text{si } i \leq j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculez le déterminant de A en utilisant la méthode des cofacteurs. Expliquez votre démarche.

Informatique

Test n° 6 (20 octobre 2003)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9. (Rechercher une chaîne de caractères qui respecte certaines conditions)

Soit `char st[200]` un texte contenant 200 caractères et `char ch[2]` une chaîne contenant 2 caractères. Rechercher dans le texte `st` les occurrences de la chaîne `ch` qui sont suivies du caractère blanc ' '. Les compter.

Décrire en français la méthode utilisée :

Écrire les instructions C traduisant l'algorithme en programme :