# Mathématique Élémentaire

## Test n° 6 (20 octobre 2003) **Correction**

Question 1. *Calculez*

$$\sum_{i=-2}^{t^2+1}(i+3) = \sum_{j=1}^{t^2+4} j \qquad \text{(changement de variable)}$$

$$= \frac{(t^2+4)(t^2+5)}{2}$$

$$\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(j+1-\ell) = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(j-\ell) + \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1$$

$$= 0 + \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1$$

(car le $1^{\text{er}}$ terme est une sommation sur tous les éléments d'une matrice anti-symétrique)

$$= n^2$$

(sommation des éléments d'une matrice $n \times n$, et tous les éléments sont égaux à 1)

Question 2. *Échelonnez la matrice suivante en discutant en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a^2-1 \\ 0 & b-1 & b^2-1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

**$a \neq 1$**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & b-1 & b^2-1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2/(a-1)$$

**$a \neq 1$, $b \neq 1$**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 1 & b+1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3/(b-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

**$a \neq 1$, $b \neq 1$, $b \neq a$**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3/(b-a)$

**$a \neq 1$, $b \neq 1$, $b = a$**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**$a \neq 1$, $b = 1$**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**$a = 1$**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-1 & b^2-1 \end{pmatrix}$$

**$a = 1$, $b \neq 1$**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

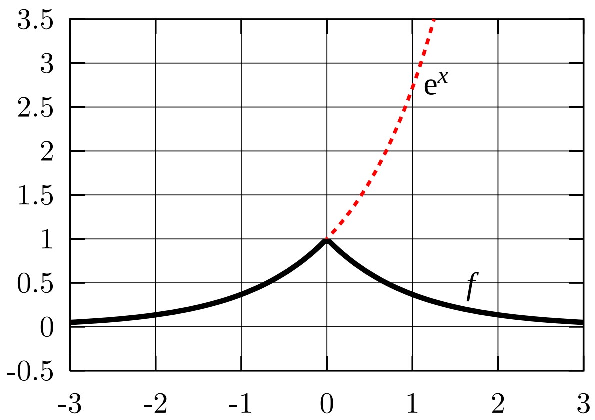
$L_2 \leftrightarrow L_3$
$L_3 \leftarrow L_3/(b-1)$

**$a = 1$, $b = 1$**

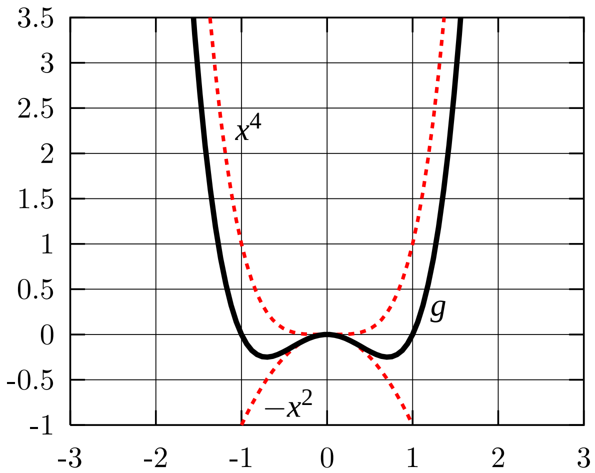
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 3. *Esquissez les graphes des fonctions suivantes. Expliquez brièvement les principales étapes qui mènent à vos graphiques.*

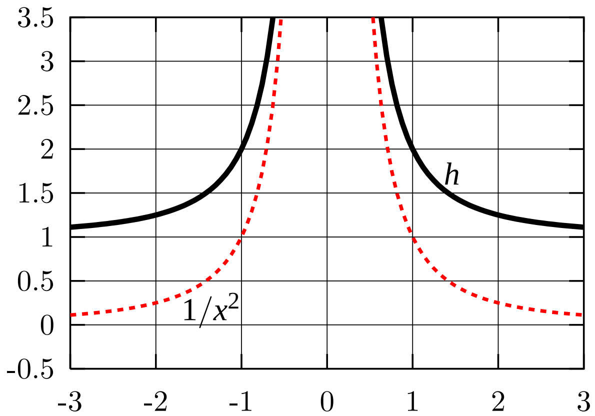
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{-|x|}, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - x^2, \qquad h : \mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2} + 1.$$




La fonction $f$ est paire (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \mathrm{e}^{-|-x|} = \mathrm{e}^{-|x|} = f(x)$), son graphe est donc symétrique par rapport à l'axe des $y$. Pour $x \leqslant 0$, $f(x) = \mathrm{e}^x$ dont le graphe est connu. Pour $x \geqslant 0$, on utilise la symétrie ci-dessus.




Pour $|x|$ grand, $x^4$ domine $x^2$ et donc $g(x) \approx x^4$. Pour $|x| \approx 0$, $x^2$ est le terme dominant et donc $g(x) \approx -x^2$. De plus la fonction $g$ est paire ($\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = g(x)$), donc son graphe est symétrique par rapport à l'axe des $y$. On peut aussi remarquer que $g(x) = x^2(x^2 - 1)$ et donc que $-1$, 0 et 1 sont les trois (seules) racines de $g$.




Pour $h$, on a encore une fonction paire (vu que $h(-x) = \frac{1}{(-x)^2} + 1 = \frac{1}{x^2} + 1 = h(x)$ pour tout $x \neq 0$) et par conséquent le graphe de $h$ est symétrique par rapport à l'axe des $y$. Quand $|x|$ est grand, $1/x^2 \approx 0$ et donc $h(x) \approx 1$. Quand $x \approx 0$, $1/x^2 > 0$ est très grand, donc aussi $h(x)$. Finalement, comme $1/x^2 > 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ h(x) > 1$.

Question 4.

(a) *Prouvez par récurrence que*

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \tag{1}$$

(b) *Soit $\boldsymbol{i} \in \mathbb{C}$ tel que $\boldsymbol{i}^2 = -1$. Calculez (en utilisant le point précédent) :*

$$\sum_{n=0}^{t} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & 1 \\ 0 & \boldsymbol{i} \end{pmatrix}^n$$

(a) Le cas de base $n = 1$, l'égalité (1) à vérifier devient :

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} a^1 & 1a^0 \\ 0 & a^1 \end{pmatrix}$$

ce qui est trivialement vrai car $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

Supposons que l'égalité (1) est vérifiée pour les naturels $n \leqslant r$, prouvons que l'égalité (1) est alors vérifiée pour $n \leqslant r+1$ $(r \geqslant 1)$. Pour ce faire, il suffit de vérifier (1) pour $n = r+1$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{r+1} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} a^{r+1} & (r+1)a^r \\ 0 & a^{r+1} \end{pmatrix}$$

Par définition de l'exponentiation, on a :

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{r+1} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{r} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

En utilisant l'hypothèse de récurence pour $n = r$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{r+1} = \begin{pmatrix} a^r & ra^{r-1} \\ 0 & a^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Par multiplication matricielle, on a :

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{r+1} = \begin{pmatrix} a^{r+1} & (r+1)a^r \\ 0 & a^{r+1} \end{pmatrix}$$

(b) Grâce au point précédent, cela revient à calculer :

$$\sum_{n=0}^{t} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & 1 \\ 0 & \boldsymbol{i} \end{pmatrix}^n = \sum_{n=0}^{t} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}^n & n\boldsymbol{i}^{n-1} \\ 0 & \boldsymbol{i}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & 1 \\ 0 & \boldsymbol{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2\boldsymbol{i} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \cdots$$

En tenant compte de la périodicité de $\boldsymbol{i}^n$ (modulo 4), et donc de $\boldsymbol{i}^{n-1}$, et du fait que la somme de 4 puissances consécutives de $\boldsymbol{i}$ et 0 (car $1 + \boldsymbol{i} + (-1) + (-\boldsymbol{i}) = 0$), on obtient le résultat suivant :

- si $t = 3 \pmod 4$, c'est-à-dire $t = 4q+3$ pour un certain $q \in \mathbb{N}$ (unique) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2q+1+(-2q-1)\boldsymbol{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- si $t = 0 \pmod 4$ et $t = 4q$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2q(\boldsymbol{i}+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- si $t = 1 \pmod 4$ et $t = 4q+1$

$$\begin{pmatrix} 1+\boldsymbol{i} & -2q(1+\boldsymbol{i})+4q+1 \\ 0 & 1+\boldsymbol{i} \end{pmatrix}$$

- si $t = 2 \pmod 4$ et $t = 4q+2$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & 2q+1+(2q+2)\boldsymbol{i} \\ 0 & \boldsymbol{i} \end{pmatrix}$$

Question 5. *Soit les nombres* $z_1 = \dfrac{-1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}}{2}$ *et* $z_2 = \dfrac{-1-\boldsymbol{i}\sqrt{3}}{2}$.

- *Mettez $z_1$ et $z_2$ sous forme trigonométrique.*

$$z_1 = -\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} \qquad \text{et}$$
$$z_2 = -\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}.$$

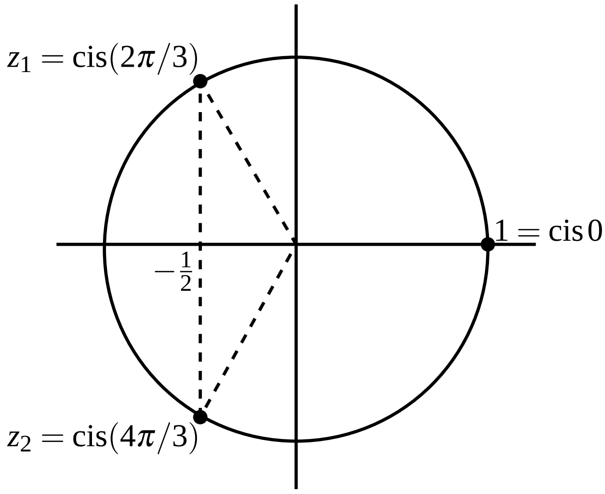



FIG. 1 – $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

- *Considérons la matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 \\ 1 & z_2 & z_1 \end{pmatrix}$$

(a) *Calculez $A^2$.*

(b) *Déduisez du point (a) la matrice $A^{-1}$.*

(a)

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 \\ 1 & z_2 & z_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 \\ 1 & z_2 & z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1+z_1+z_2 & 1+z_1+z_2 \\ 1+z_1+z_2 & 1+z_1^2+z_2^2 & 1+z_1z_2+z_1z_2 \\ 1+z_1+z_2 & 1+z_1z_2+z_1z_2 & 1+z_2^2+z_1^2 \end{pmatrix}$$

Or,

$$\begin{aligned}
1+z_1+z_2 &= 1+\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}=0 && \text{(voir figure 1)}\\
1+2z_1z_2 &= 1+2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}=1+2\operatorname{cis}0=3 && (\text{car } \operatorname{Arg}(z\cdot z')=\operatorname{Arg}(z)+\operatorname{Arg}(z') \bmod 2\pi)\\
1+z_1^2+z_2^2 &= 1+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}=0 && (\text{car } \operatorname{Arg}(z^n)=n\operatorname{Arg}(z) \bmod 2\pi).
\end{aligned}$$

Donc

$$A^2=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&3\\0&3&0\end{pmatrix}$$

(b) Pour obtenir l'identité à partir de $A\cdot A$, il suffit d'effectuer les transformations :

- $L_i \leftarrow L_i/3$ avec $i=1,2,3$
- $L_2 \leftrightarrow L_3$

Or, effectuer une transformation élémentaire de ligne sur une matrice revient à multiplier à gauche cette matrice par l'identité dans laquelle on a aplliqué la même transformation. Dès lors, on a :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac13&0&0\\0&\frac13&0\\0&0&\frac13\end{pmatrix}}_{=A^{-1}}\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Donc,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac13&0&0\\0&0&\frac13\\0&\frac13&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&z_1&z_2\\1&z_2&z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&1/3&1/3\\1/3&z_2/3&z_1/3\\1/3&z_1/3&z_2/3\end{pmatrix}$$

Question 6. *Soit $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par*

$$a_{ij}=\begin{cases}2^j & \text{si } i\leqslant j,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

*Calculez le déterminant de A en utilisant la méthode des cofacteurs. Expliquez votre démarche.*

$$A=\begin{pmatrix}2&2^2&2^3&\cdots&2^n\\0&2^2&2^3&\cdots&2^n\\0&0&2^3&\cdots&2^n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2^n\end{pmatrix}$$

Développons le déterminant de $A$ suivant la première colonne :

$$\det A=2\cdot\det\begin{pmatrix}2^2&2^3&\cdots&2^n\\0&2^3&\cdots&2^n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&2^n\end{pmatrix}=2\cdot2^2\cdot\det\begin{pmatrix}2^3&2^4&\cdots&2^n\\0&2^4&\cdots&2^n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&2^n\end{pmatrix}$$

Et en répétant le processus, on a :

$$\det A = 2 \cdot 2^2 \cdots 2^n = 2^{1+2+\cdots+n} = 2^{n(n+1)/2}$$

Remarque : L'argument ci-dessus montre que le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit des éléments situés sur la diagonale principale.

Question 7. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.*

- *Définissez « $f$ est injective ».*

$$\forall x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- *Niez la définition précédente.*

$$\exists x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f, \quad x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2) \tag{2}$$

- *Prouvez que, si $f$ est périodique, alors $f$ n'est pas injective.*

  L'hypothèse « $f$ est périodique » signifie qu'il existe $T > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x)$$

  En particulier, pour $x = 0$, on a

$$f(T) = f(0)$$

  (on n'a pas de problème avec le domaine de $f$ ici car on a supposé que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$ vu qu'on a écrit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Donc en prenant $x_1 = 0$ et $x_2 = T$, on peut dire que

$$x_1 \neq x_2 \quad \text{et} \quad f(x_1) = f(x_2)$$

  ce qui montre que (2) est vérifiée, c'est-à-dire que $f$ n'est pas injective.

Question 8. *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Montrez que si $A$ possède un inverse, alors celui-ci est unique (et on peut donc employer la notation $A^{-1}$ pour le désigner).*

Soit $B$ et $C$ deux inverses de $A$. Nous allons montrer que $B = C$. Par hypothèse, on a

$$AB = \mathbb{1} = BA \qquad \text{et} \qquad AC = \mathbb{1} = CA.$$

Donc

$$B = B\mathbb{1} = B(AC) \overset{(\dagger)}{=} (BA)C = \mathbb{1}C = C \tag{3}$$

où (†) utilise l'associativité de la multiplication matricielle. L'équation (3) dit bien que $B = C$ comme désiré.