Mathématique Élémentaire

Examen (3 novembre 2004)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur. Des expressions telles que « on voit bien que... » ne sont *pas* des justifications.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit A la proposition : « Si $p \in \mathbb{N}$ est premier, alors pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a^p - a$ est divisible par p ». $/4$

(a) Donnez (en bon français) la contraposée de la proposition A.

(b) Donnez (en bon français) la négation de la proposition A.

Question 2. Calculez $/4$

- $|3+\boldsymbol{i}|$
- $|(3+\boldsymbol{i})^2|$
- $\overline{27-12\boldsymbol{i}}$
- $(3+\boldsymbol{i})^{-1}$

Nom :

Prénom :

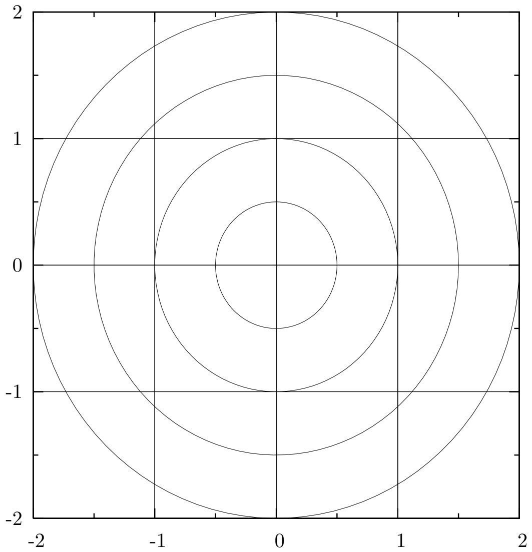
Section :

Question 3. Calculez, dans $\mathbb{C}$, sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, les solutions de chacune des deux équations suivantes : /6

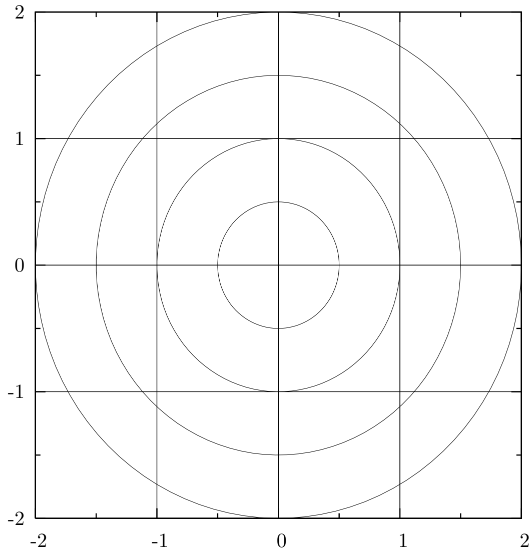
(a) $X^5 + X = 0$

(b) $X^4 + 1 = 0$

Représentez ces solutions sur les graphes ci-dessous.



Solutions de $X^5 + X = 0$



Solutions de $X^4 + 1 = 0$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Calculez /5

- $\sum_{k=1}^{t}(3+k^2)$

- $\sum_{k=1}^{t}\sum_{\ell=1}^{k}(1+k)$

- $\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{n}\left(n+(u-v)^3\right)$

Question 5. Prouver par récurrence la formule de De Moivre : pour tout $n \geqslant 1$, $(\operatorname{cis}\theta)^n = \operatorname{cis}(n\theta)$ sachant que $\operatorname{cis}(\theta)\operatorname{cis}(\theta') = \operatorname{cis}(\theta+\theta')$. /4

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln x$. /5

- Donnez une équation cartésienne de la droite D_α tangente au graphe de f au point $(\alpha, f(\alpha))$.
- Montrez que D_α passe par l'origine si et seulement si $\alpha = \mathrm{e}$.

Question 7. Donnez la table de vérité de /4

$$A \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \wedge \neg C). \tag{1}$$

À partir de celle-ci, donnez une formule équivalente à (1) qui soit plus simple. Justifiez.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. /7

(a) Calculez, si possible, l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Résolvez le système

$$\begin{cases} -3x + 2y = 19 \\ -2x + 4y - 2z = 0 \\ x - y + 5z = -38 \end{cases}$$

L'efficacité de la méthode utilisée est importante.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Question 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2 - |x|}$. Dites si f définit une fonction. Le cas échéant, déterminez son domaine. /5

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Pour quelles valeurs des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$, le vecteur $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ est-il solution du système : /5

$$\begin{cases} ax + by + z = 0 \\ bx + ay = 0 \\ by + az = -1 \end{cases}$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11. Écrivez sous forme d'une union d'intervalles (éventuellement infinis) l'ensemble /7

$$\left\{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leqslant 3 \text{ et } 2x \leqslant \sqrt{x^2+1}\right\}$$

Mathématique Élémentaire

Examen (3 novembre 2004)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 12. Cochez la case adéquate selon que vous pensez que les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. /8

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$ est inversible $\Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, 4,\ a_{ii} \neq 0$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Le système $\begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x + b'y = 0 \end{cases}$ possède toujours une solution.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Les droites $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ se coupent en un seul point si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Un vecteur directeur de la droite $ax + by = c$ est $\left(1, \dfrac{a}{b}\right)$.

Justifiez en détail chacune de vos réponses.

Mathématique Élémentaire

Examen (3 novembre 2004)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13. Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\1\leqslant j\leqslant N}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\1\leqslant j\leqslant N}}$. Prouvez que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ où $\operatorname{tr} C$ désigne la trace de la matrice C. /5

Question 14. Trouvez tous les $b, c \in \mathbb{C}$ tels que l'équation $x^2 + bx + c = 0$ ait pour solutions complexes $3 - 3\boldsymbol{i}$ et $-3 + 2\boldsymbol{i}$. /4

Nom :

Prénom :

Section :

Question 15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin x^2$. Déterminez le polynôme $p(x) = ax^2 + bx + c$ de manière à ce qu'il satisfasse les trois conditions suivantes : /7

$$p(0) = f(0), \qquad \partial_x p(0) = \partial_x f(0), \qquad \partial_x^2 p(0) = \partial_x^2 f(0).$$