# Mathématique Élémentaire

## Examen (3 novembre 2004) **Correction**

Question 1. *Soit A la proposition : « Si $p \in \mathbb{N}$ est premier, alors pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a^p - a$ est divisible par $p$ ».*

*(a) Donnez (en bon français) la contraposée de la proposition A.*

S'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^p - a$ n'est pas divisible par $p$ alors $p$ n'est pas premier.

*(b) Donnez (en bon français) la négation de la proposition A.*

$p$ est un naturel premier et il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^p - a$ n'est pas divisible par $p$.

Question 2. *Calculez*

- $|3+\boldsymbol{i}| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$
- $|(3+\boldsymbol{i})^2| = |3+\boldsymbol{i}|^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10$
- $\overline{27-12\boldsymbol{i}} = 27+12\boldsymbol{i}$
- $(3+\boldsymbol{i})^{-1} = \dfrac{3-\boldsymbol{i}}{|3+\boldsymbol{i}|^2} = \dfrac{3-\boldsymbol{i}}{10}$

Question 3. *Calculez, dans $\mathbb{C}$, sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, les solutions de chacune des deux équations suivantes :*

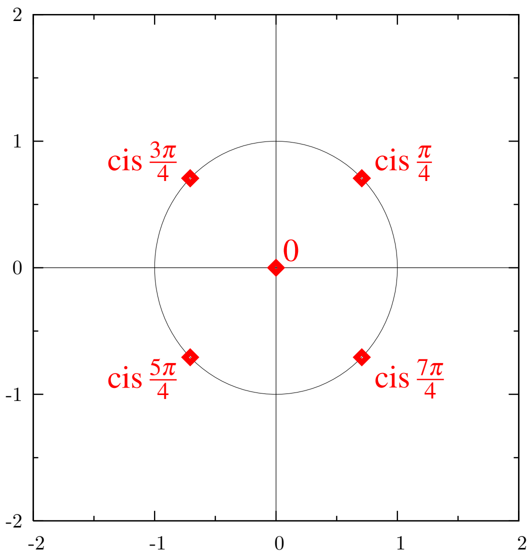
*(a)* $X^5 + X = 0$

*(b)* $X^4 + 1 = 0$

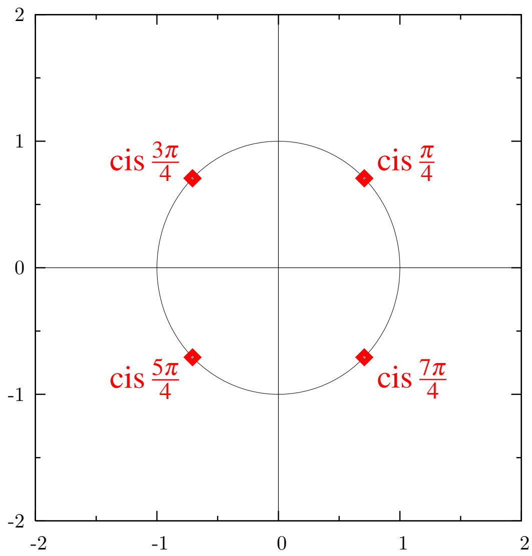
*Représentez ces solutions sur les graphes ci-dessous.*

Dans $\mathbb{C}$, $X^5 + X = 0$ si et seulement si $X(X^4+1) = 0$ si et seulement si $X = 0$ ou $X^4 + 1 = 0$ (vu que dans $\mathbb{C}$, $ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$).
Il suffit donc de résoudre $X^4 = -1 = \operatorname{cis}(\pi)$ dans $\mathbb{C}$ pour obtenir les solutions de chacune des équations. Clairement $\operatorname{cis}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une solution particulière de $X^4 = -1$. Donc $\operatorname{cis}(\frac{\pi}{4})\,U_4$ est l'ensemble des solutions de $X^4 = -1$, ou plus explicitement :

$$\begin{aligned}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot U_4 &= \left\{\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right), \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right), \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right), \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right\} \\ &= \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\end{aligned}$$




Solutions de $X^5 + X = 0$




Solutions de $X^4 + 1 = 0$

**Question 4.** *Calculez*

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{t}(3+k^2) = \sum_{k=1}^{t} 3 + \sum_{k=1}^{t} k^2 = 3t + \frac{t(t+1)(2t+1)}{6}$
- $$\sum_{k=1}^{t}\sum_{\ell=1}^{k}(1+k) = \sum_{k=1}^{t} k(1+k) = \sum_{k=1}^{t} k + \sum_{k=1}^{t} k^2$$
  $$= \frac{t(t+1)}{2} + \frac{t(t+1)(2t+1)}{6} = \frac{t(t+1)(3+2t+1)}{6} = \frac{t(t+1)(t+2)}{3}$$
- $$\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{n}\bigl(n+(u-v)^3\bigr) = \sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{n} n + \underbrace{\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{n}(u-v)^3}_{\substack{0 \text{ car matrice } n\times n\\ \text{antisymétrique}\\ (v-u=-(u-v))}} = \sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{n} n = n^2 n = n^3$$

**Question 5.** *Prouver par récurrence la formule de De Moivre : pour tout* $n \geqslant 1$, $(\operatorname{cis}\theta)^n = \operatorname{cis}(n\theta)$ *sachant que*

$$\operatorname{cis}(\theta)\operatorname{cis}(\theta') = \operatorname{cis}(\theta+\theta'). \qquad (1)$$

Cas initial ($n = 1$) : À vérifier $(\operatorname{cis}\theta)^1 = \operatorname{cis}(1\cdot\theta)$, ce qui est trivialement vérifié par définition de « exposant 1 » et du fait que 1 est le neutre pour $\cdot_{\mathbb{R}}$.

Étape de récurrence : Supposons que la formule soit vérifiée pour tout $1 \leqslant n \leqslant k$. Prouvons que, sous cette hypothèse, la formule est vraie pour $n = k+1$, c'est-à-dire $(\operatorname{cis}\theta)^{k+1} = \operatorname{cis}((k+1)\theta)$. On a

$$\begin{aligned}
(\operatorname{cis}\theta)^{k+1} &= (\operatorname{cis}\theta)^k(\operatorname{cis}\theta) && \text{(propriété de l'exponentation)}\\
&= \operatorname{cis}(k\theta)\operatorname{cis}\theta && \text{(hypothèse de récurrence pour } n = k\text{)}\\
&= \operatorname{cis}(k\theta+\theta) && \text{(application de (1))}\\
&= \operatorname{cis}((k+1)\theta)
\end{aligned}$$

Question 6. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln x$.*

- *Donnez une équation cartésienne de la droite $D_\alpha$ tangente au graphe de $f$ au point $(\alpha, f(\alpha))$.*
- *Montrez que $D_\alpha$ passe par l'origine si et seulement si $\alpha = \mathrm{e}$.*

- Une équation de $D_\alpha$ est

$$y = f(\alpha) + \partial f(\alpha)(x-\alpha)$$

Comme $f(x) = \ln x$ et $\partial f(x) = 1/x$, cette équation devient

$$y = \ln\alpha + \frac{1}{\alpha}(x-\alpha) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad y = \ln\alpha + \frac{x}{\alpha} - 1.$$

- Pour le second point, on a que

$$\begin{aligned}
(0,0) \in D_\alpha &\Leftrightarrow 0 = \ln\alpha + \frac{0}{\alpha} - 1\\
&\Leftrightarrow 1 = \ln\alpha\\
&\Leftrightarrow \alpha = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}
\end{aligned}$$

Question 7. *Donnez la table de vérité de*

$$A \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \wedge \neg C). \tag{2}$$

*À partir de celle-ci, donnez une formule équivalente à (2) qui soit plus simple. Justifiez.*

| $A$ | $B$ | $C$ | $B \Rightarrow C$ | $A \vee (B \Rightarrow C)$ | $B \wedge \neg C$ | (2) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Clairement en comparant $B \wedge \neg C$ et (2), on voit que ces deux propositions ont la même table de vérité, c'est-à-dire que $B \wedge \neg C$ est équivalente à (2) ou encore que $(2) \Leftrightarrow B \wedge \neg C$ est une tautologie.

## Question 8.

*(a) Calculez, si possible, l'inverse de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

*(b) Résolvez le système*

$$\begin{cases} -3x+2y=19 \\ -2x+4y-2z=0 \\ x-y+5z=-38 \end{cases}$$

*L'efficacité de la méthode utilisée est importante.*

(a) On utilise la méthode de la matrice compagnon :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3$$
$$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 15 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftrightarrow L_3$$
$$L_2 \leftarrow L_2/2$$
$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3/19$$
$$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3$$
$$L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{-5}{19} & \frac{-5}{38} & \frac{-1}{19} \\ \frac{-4}{19} & \frac{15}{38} & \frac{3}{19} \\ \frac{1}{19} & \frac{1}{38} & \frac{4}{19} \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{-9}{19} & \frac{5}{19} & \frac{2}{19} \\ \frac{-4}{19} & \frac{15}{38} & \frac{3}{19} \\ \frac{1}{19} & \frac{1}{38} & \frac{4}{19} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

(b) Le système s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ -38 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ -38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-9}{19} & \frac{5}{19} & \frac{2}{19} \\ \frac{-4}{19} & \frac{15}{38} & \frac{3}{19} \\ \frac{1}{19} & \frac{1}{38} & \frac{4}{19} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ -38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -10 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Question 9. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto\sqrt{x^2-|x|}$. Dites si $f$ définit une fonction. Le cas échéant, déterminez son domaine.*

C'est une fonction. En effet, à un $x\in\mathbb{R}$ fixé correspondra au plus une valeur, à savoir $\sqrt{x^2-|x|}$ (qui peut ou non exister selon que la quantité sous la racine est $\geqslant 0$ ou non).
Par définition, le domaine est l'ensemble des $x$ pour lesquels $f(x)$ existe. Donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{Dom} f &= \{x\in\mathbb{R} : x^2-|x|\geqslant 0\}\\
&= \{x\in\mathbb{R} : |x|^2\geqslant |x|\}\\
&= \{x\in\mathbb{R} : x=0 \text{ ou } |x|\geqslant 1\}\\
&= \{x\in\mathbb{R} : x=0\}\cup\{x\in\mathbb{R} : |x|\geqslant 1\}\\
&= \{0\}\cup\{x\in\mathbb{R} : x\leqslant -1 \text{ ou } x\geqslant 1\}\\
&= ]-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,+\infty[
\end{aligned}$$

Question 10. *Pour quelles valeurs des paramètres $a,b\in\mathbb{R}$, le vecteur $(x,y,z)=(1,2,3)$ est-il solution du système :*

$$\begin{cases} ax+by+z=0\\ bx+ay=0\\ by+az=-1\end{cases}$$

Pour exprimer que le vecteur $(1,2,3)$ est solution du système, remplaçons dans chacune des équations ci-dessus $x$ par 1, $y$ par 2 et $z$ par 3. On obtient alors

$$\begin{cases} a+2b+3=0 & (3)\\ b+2a=0 & (4)\\ 2b+3a=-1 & (5)\end{cases}$$

En faisant $(3)-(5)$, on a $-2a=-2$ c'est-à-dire $a=1$. En remplaçant dans (4), on trouve $b=-2$. On vérifie enfin que $(a,b)=(1,-2)$ satisfait aussi les équations (3) et (5).

Question 11. *Écrivez sous forme d'une union d'intervalles (éventuellement infinis) l'ensemble*

$$\left\{x\in\mathbb{R} : |x-1|\leqslant 3 \text{ et } 2x\leqslant\sqrt{x^2+1}\right\}$$

Dans un premier temps, traitons chacune des deux égalités séparément. Puisque $|\xi|\leqslant\rho\Leftrightarrow(-\rho\leqslant\xi \text{ et } \xi\leqslant\rho)$, on a

$$\begin{aligned}
|x-1|\leqslant 3 &\Leftrightarrow -3\leqslant x-1 \text{ et } x-1\leqslant 3\\
&\Leftrightarrow -2\leqslant x \text{ et } x\leqslant 4\\
&\Leftrightarrow x\in[-2,4]
\end{aligned}$$

Pour la deuxième inégalité, notons qu'il n'y a pas de condition d'existence car $x^2+1\geqslant 0$ quel que soit $x\in\mathbb{R}$ et on peut donc toujours en prendre la racine. Distinguons deux cas :

- Si $x \leqslant 0$, l'inégalité $2x \leqslant \sqrt{x^2+1}$ est satisfaite (puisqu'une racine carrée est toujours $\geqslant 0$).
- Si $x < 0$, on peut élever au carré, ce qui donne $4x^2 \leqslant x^2+1$, ou encore $x^2 \leqslant 1/3$, ce qui est équivalent à $-\sqrt{1/3} \leqslant x \leqslant \sqrt{1/3}$. Parmi les $x$ auquels on s'intéresse, à savoir $x > 0$, ceux qui vérifient l'inéquation sont donc $]0, \sqrt{1/3}]$.

En remettant ces deux cas ensemble, on trouve

$$2x \leqslant \sqrt{x^2+1} \quad\Leftrightarrow\quad x \leqslant 0 \text{ ou } x \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \quad\Leftrightarrow\quad x \in \left]-\infty, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] = \left]-\infty, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}\left\{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leqslant 3 \text{ et } 2x \leqslant \sqrt{x^2+1}\right\} &= \left\{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leqslant 3\right\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} : 2x \leqslant \sqrt{x^2+1}\right\} \\ &= [-2,4] \cap \left]-\infty, \frac{\sqrt{3}}{3}\right] = \left[-2, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]\end{aligned}$$

Question 12. *Cochez la case adéquate selon que vous pensez que les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.*

(a) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$ *est inversible* $\Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, 4,\ a_{ii} \neq 0$.

(b) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Le système* $\begin{cases} ax+by=0 \\ a'x+b'y=0 \end{cases}$ *possède toujours une solution.*

(c) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Les droites $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ se coupent en un seul point si et seulement si $ab'-a'b \neq 0$.*

(d) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *Un vecteur directeur de la droite $ax+by=c$ est* $\left(1, \frac{a}{b}\right)$.

*Justifiez en détail chacune de vos réponses.*

(a) Cette matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul. Or celui-ci vaut $a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}$ car la matrice est triangulaire. On a donc que la matrice est inversible si et seulement si $a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44} \neq 0$ si et seulement si $a_{11} \neq 0$ et $a_{22} \neq 0$ et $a_{33} \neq 0$ et $a_{44} \neq 0$.

(b) C'est un système homogène. Un tel système admet toujours la solution triviale ; plus précisément $(0,0)$ est ici solution.

(c) Ces droites sont sécantes en un unique point si et seulement si le système formé par leurs deux équations admet une solution unique, c'est-à-dire si et seulement le déterminant de ce système est non-nul. Ce déterminant est précisément $ab'-a'b$.

(d) Un vecteur normal de cette droite est $(a,b)$. Un vecteur directeur est donc $(-b,a)$. Or les vecteurs $(1, \frac{a}{b})$ et $(-b,a)$ ne sont pas colinéaires (sauf si $a=0$).

Question 13. *Soient* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant j\leqslant N}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant j\leqslant N}}$. *Prouvez que* $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ *où* $\mathrm{tr}\,C$ *désigne la trace de la matrice* $C$.

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{N} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} a_{ik}\,b_{ki} \tag{6}$$

Pour tout $i,k \in \{1,\dots,N\}$, posons $a_{ik}\,b_{ki} = D_{ik}$. Notons $D$ la matrice ainsi obtenue. La somme (6) consiste à sommer d'abord les éléments de la ligne $i$ de $D$ (pour chaque $i$) et ensuite à sommer les résultats ainsi obtenus. On peut évidemment d'abord sommer sur les colonnes $k$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} a_{ik}\,b_{ki} &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} a_{ik}\,b_{ki} && \text{par le raisonement ci-dessus}\\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} b_{ki}\,a_{ik} && \text{commutativité dans } \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}\\
&= \sum_{k=1}^{N} (BA)_{kk} = \mathrm{tr}(BA) && \text{par définition de la trace.}
\end{aligned}$$

Question 14. *Trouvez tous les* $b,c \in \mathbb{C}$ *tels que l'équation* $x^2+bx+c=0$ *ait pour solutions complexes* $3-3\boldsymbol{i}$ *et* $-3+2\boldsymbol{i}$.

Dans le cas où $3-3\boldsymbol{i}$ et $-3+2\boldsymbol{i}$ sont solutions de $x^2+bx+c=0$, on a

$$x^2+bx+c = \big(x-(3-3\boldsymbol{i})\big)\big(x-(-3+2\boldsymbol{i})\big)$$

Après calculs et identification des coefficients en $x^2$, $x$ et indépendants, on obtient $b=\boldsymbol{i}$ et $c = -3+15\boldsymbol{i}$.

Une autre façon d'obtenir ce résultat est de résoudre le système en $b$ et $c$, obtenu en substituant à $x$ respectivement $3-3\boldsymbol{i}$ et $-3+2\boldsymbol{i}$ dans l'équation $x^2+bx+c=0$ (par définition de « être solution »). On obtient alors

$$\begin{cases}(3-3\boldsymbol{i})^2+b(3-3\boldsymbol{i})+c=0\\(-3+2\boldsymbol{i})^2+b(-3+2\boldsymbol{i})+c=0\end{cases}$$

Système qui après résolution fournit $b=\boldsymbol{i}$ et $c=-3+15\boldsymbol{i}$.

Question 15. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin x^2$. *Déterminez le polynôme* $p(x) = ax^2 + bx + c$ *de manière à ce qu'il satisfasse les trois conditions suivantes :*

$$p(0) = f(0), \qquad \partial_x p(0) = \partial_x f(0), \qquad \partial_x^2 p(0) = \partial_x^2 f(0). \tag{7}$$

Commençons par calculer les dérivées successives de $p$ et $f$ :

$$\begin{array}{lll} p(x) = ax^2 + bx + c & \partial_x p(x) = 2ax + b & \partial_x^2 p(x) = 2a \\ f(x) = \sin(x^2) & \partial_x f(x) = 2x\cos x^2 & \partial_x^2 f(x) = 2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2 \end{array}$$

En évaluant ces quantités en $x = 0$, on obtient que (7) est équivalent à

$$c = \sin 0^2 = 0, \qquad b = 0, \qquad 2a = 2\cos 0^2 = 2,$$

c'est-à-dire que $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$. Par conséquent, le polynôme cherché est $p(x) = 1x^2 + 0x + 0 = x^2$.