Mathématique Élémentaire

Examen

(10 janvier 2005)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur. Des expressions telles que « on voit bien que... » ne sont *pas* des justifications.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit A la proposition : « Si $\sqrt{3}$ est rationnel, alors $1+\sqrt{3}$ est rationnel ». /4

(a) Donnez (en bon français) la contraposée de la proposition A.

(b) Donnez (en bon français) la négation de la proposition A.

Question 2. Calculez /3

- $|3+\boldsymbol{i}|+|3+\boldsymbol{i}|^2$
- $(5-\boldsymbol{i})^{-1}$
- $\dfrac{3+\boldsymbol{i}}{(3-\boldsymbol{i})^{-1}}$

Mathématique Élémentaire

Examen (10 janvier 2005)

Nom :

Prénom :

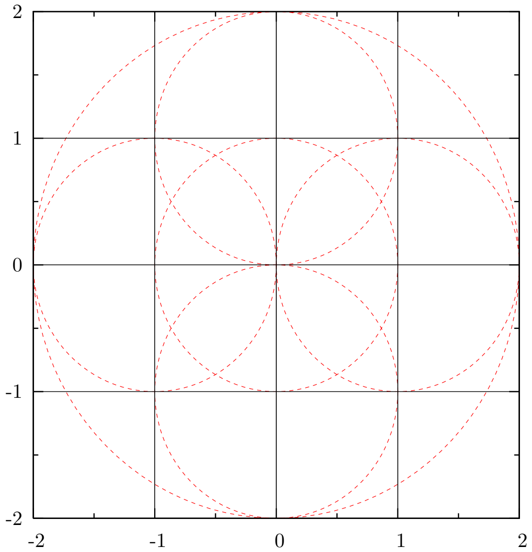
Section :

Question 3. Calculez, dans $\mathbb{C}$, sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, les solutions de l'équation

$$(X-1)^5 = X-1 \tag{1}$$

/6

Représentez ces solutions sur le graphe ci-dessous.



Solutions de (1).

Mathématique Élémentaire

Examen (10 janvier 2005)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. Calculez /4

- $\sum_{k=1}^{t} |3+\boldsymbol{i}|^k$ où $\boldsymbol{i}^2 = -1$.

- $\sum_{v=1}^{m} \sum_{u=1}^{m} \left(m^2 - (u-v)^2\right)$

- $\sum_{t=1}^{10} \sum_{\ell=1}^{t} (1-k)$

Question 5. Prouvez que $1+\sqrt{7}$ n'est pas rationnel. /4

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + px + q$ où $p, q \in \mathbb{R}$. Déterminez les valeurs de p et q pour lesquelles la droite d'équation $y = x - 1$ est tangente au graphe de f au point $(3, 2)$. /5

Question 7. La relation /4

$$f : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

définit-elle une fonction ? Précisez, le cas échéant, son domaine.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Quel est l'ensemble des vecteurs (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux aux droites D_1 et D_2 définies par /5

$$D_1 \equiv 1 - x = \frac{y+2}{-3} = \frac{-z+2}{-1}$$
$$D_2 \equiv (x,y,z) = (3\lambda + 1, -\lambda - 2, 5 + \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Décrivez géométriquement l'ensemble obtenu.

Question 9. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices inversibles. Montrez que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. /3

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 10. Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \cos(\alpha t) + \sin(\alpha t)$ est-elle solution de l'équation /5

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad m\partial_t^2 x(t) = -kx(t) \tag{2}$$

où $m, k \in \mathbb{R}^{>0}$.

Question 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Pour rappel, on dit que $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction inverse de f si et seulement si $f \circ f^{-1} = \mathbb{1}$ et $f^{-1} \circ f = \mathbb{1}$. On suppose f^{-1} dérivable. Prouvez que, pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $\partial f\big(f^{-1}(y)\big) \neq 0$, on a /3

$$\partial f^{-1}(y) = \frac{1}{\partial f\big(f^{-1}(y)\big)} \tag{3}$$

INDICATION : Utilisez la formule de dérivation des fonctions composées.

Nom :

Prénom :

Section :

/7

Question 12. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ défini par

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leqslant 4 \text{ et } |\sqrt{x} - 1| \leqslant 1\right\}$$

- A-t-on $0 \in A$? Justifiez.

- A-t-on $16 \in A$? Justifiez.

- Écrivez A sous la forme d'une union d'intervalles non-vides (mais éventuellement infinis) disjoints.

Mathématique Élémentaire

Examen (10 janvier 2005)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouvez par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

/5

$$\partial_x^k x^n = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases} \tag{4}$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 14. Prouvez qu'il existe un seul polynôme $p(X)$ de degré 3 de la forme $X^3 + aX^2 + bX + c$ vérifiant : /5

$$p(1) = 4, \qquad p(2) = 15, \qquad p(3) = 40.$$

Nom :

Prénom :

Section :

/7

Question 15. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda+1 & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Calculez le déterminant de A.

(b) Calculez, si possible, l'inverse de A pour $\lambda = 2$.

(c) Soit le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda+1 & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \tag{5}$$

Résolvez ce système uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice A est nul. Donnez l'ensemble des solutions et précisez s'il s'agit d'un système impossible, indéterminé,...

Nom :
Prénom :
Section :

Question 15 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.