Mathématique Élémentaire

Examen (6 juin 2005)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur. Des expressions telles que « on voit bien que... » ne sont *pas* des justifications.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit A la proposition : « si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de $\partial_t u = u$, alors u est la fonction $t \mapsto c\,\mathrm{e}^t$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$ ».

(a) Donnez, en bon français, la contraposée de la proposition A.

(b) Donnez, en bon français, la négation de la proposition A.

Question 2. Calculez

- $\dfrac{1}{3+\boldsymbol{i}}$

- $\left|\left(\dfrac{3-\boldsymbol{i}}{1+2\boldsymbol{i}}\right)^5\right|$

- $\dfrac{\boldsymbol{i}^{-1}\,\boldsymbol{i}^{-2}}{\boldsymbol{i}^3}$

Mathématique Élémentaire

Examen (6 juin 2005)

Nom :

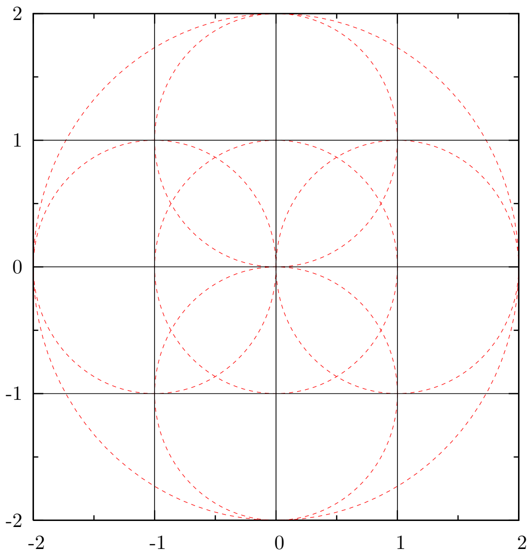
Prénom :

Section :

Question 3. Calculez, dans $\mathbb{C}$, sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, les solutions de l'équation

$$X^3 + 1 = 0 \tag{1}$$

Représentez ces solutions sur le graphe ci-dessous. Justifiez vos calculs.



Solutions de (1).

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Calculez

- $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} t^{ij}(t^i - 1)$ où $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- $\sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} (k - \ell)$

- $\sum_{k=0}^{10} (\cos k + \boldsymbol{i} \sin k)$ où $\boldsymbol{i}^2 = -1$.

Question 5. Prouvez que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\bar{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$.

Mathématique Élémentaire

Examen (6 juin 2005)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. On dit que A est *antisymétrique* si $A^t = -A$.

(a) La matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle antisymétrique ? Justifiez votre réponse.

(b) Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice quelconque. Montrez que la matrice $M - M^t$ est antisymétrique.

Question 7. Soient $u, v \in \mathbb{R}^3$. Prouvez que $u \cdot v = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2$. Détaillez vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Pour quelle(s) valeur(s) de $p, q \in \mathbb{R}$, les droites tangentes au graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto px^4 + x^2 + qx$ en $x = 0$ et en $x = 1$ sont-elles confondues.

Mathématique Élémentaire

Examen (6 juin 2005)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9.

(a) Donnez une équation cartésienne du plan $\alpha \subseteq \mathbb{R}^3$ passant par les points $p = (1,1,1)$, $q = (4,0,2)$ et $r = (0,1,-1)$.

(b) Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite $D \subseteq \mathbb{R}^3$ passant par $(-1,0,3)$ et perpendiculaire au plan $\beta \equiv x - 3y + 2z = 7$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Soient les ensembles $A \subseteq \mathbb{R}$ et $B \subseteq \mathbb{R}$ définis par

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x-1| \leqslant 4 \text{ et } |\sqrt{x-2}-1| \leqslant 1 \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{x-1} \leqslant 2 \text{ et } \sin|\sqrt{x-2}-1| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

- A-t-on $0 \in A$? Justifiez.

- A-t-on $2 \in A$? Justifiez.

- Écrivez A sous la forme d'une union d'intervalles non-vides (mais éventuellement infinis) disjoints.

- Prouvez que $A \subseteq B$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Déterminez l'ensemble des vecteurs $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient $Av = 3v$. Interprétez géométriquement cet ensemble.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouvez par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$\partial_x^k x^n = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases} \tag{2}$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13.

- Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. La matrice A est inversible si et seulement si *(on demande de cocher toutes les réponses correctes, non de justifier)*

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\text{dét} A = 0$

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\text{dét} A \neq 0$

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\text{dét} A = 1$

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\text{dét} A > 0$

- Montrez que l'inverse d'une matrice, s'il existe, est unique.

- Calculez, s'il existe, l'inverse de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

Question 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (définie sur tout $\mathbb{R}$).

(a) Définissez « f est paire ».

(b) Définissez « f est strictement croissante ».

(c) Montrez que si f est paire, alors elle n'est pas strictement croissante. Expliquez clairement vos arguments.