Mathématique Élémentaire

Examen (16 août 2005)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur. Des expressions telles que « on voit bien que... » ne sont *pas* des justifications.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Prouvez que $1+\sqrt{7}$ n'est pas rationnel. /4

Question 2. Calculez /4

- $\sum_{k=0}^{20} (1-\boldsymbol{i})^k$

- $\sum_{s=0}^{n} \sum_{t=0}^{n} (s-t)(s+t)$

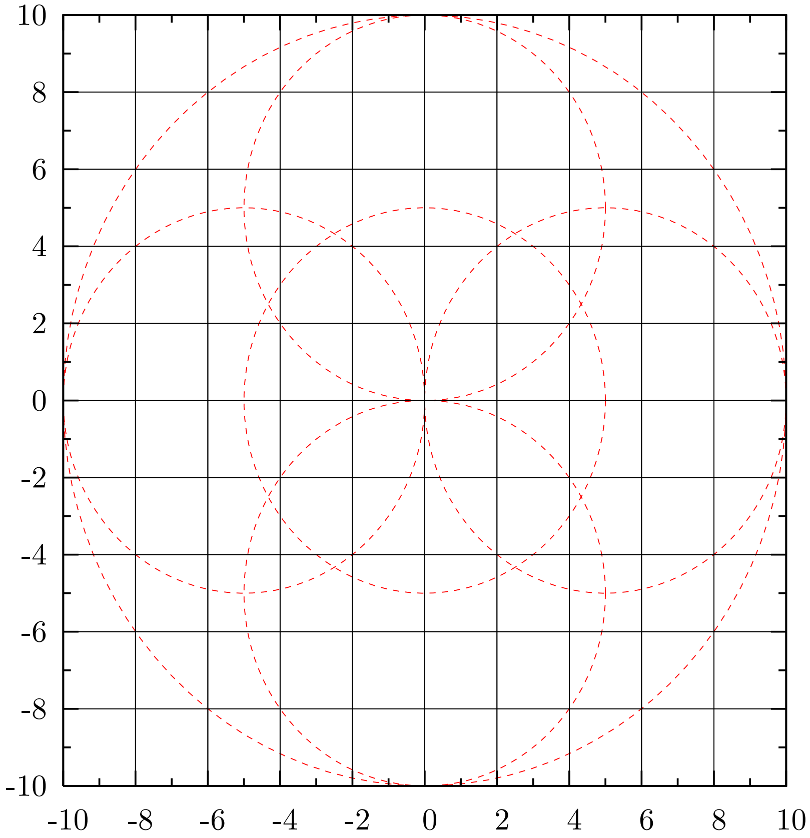
Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Calculez, dans $\mathbb{C}$, sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, les solutions de l'équation $x^4 - 81 = 0$. Représentez les solutions sur le graphique ci-dessous. Détaillez vos calculs.

/6



Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto px^2 + 1$ où $p \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Pour quelle(s) valeur(s) de p les tangentes au graphe de f aux points d'abscisse -1 et 1 sont-elles perpendiculaires. Pour chacun de ces p, donnez le point d'intersection de ces deux tangentes. /5

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. On considère l'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ défini par

/6

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant \frac{1}{|x-1|} \leqslant \frac{1}{x-1} \right\}.$$

- A-t-on $0 \in A$? Justifiez.

- A-t-on $2 \in A$? Justifiez.

- Écrivez A sous la forme d'une union d'intervalles non-vides (mais éventuellement infinis) disjoints. Justifiez votre réponse.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. /5

- Définissez « la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire ».

- Définissez « la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire ».

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. Prouvez que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire, alors $\partial f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire.

- L'implication réciproque dans l'affirmation précédente est-elle vraie ? Donnez une preuve ou un contre-exemple.

Question 7. Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Prouvez que si a divise b et b divise a, alors $a = b$. Veuillez écrire votre argument en détail. /2

Nom :

Prénom :

Section :

/5

Question 8. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & x & 0 \\ x & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

où $x \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de x la matrice A est-elle inversible ? Pour ces valeurs, calculez A^{-1} en fonction de x.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Question 9. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. On dit que A est idempotente si $A^2 = A$. Soient $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices telles que $MN = M$ et $NM = N$. Montrez que MN est idempotente. /2

Mathématique Élémentaire

Examen (16 août 2005)

Nom :

Prénom :

Section :

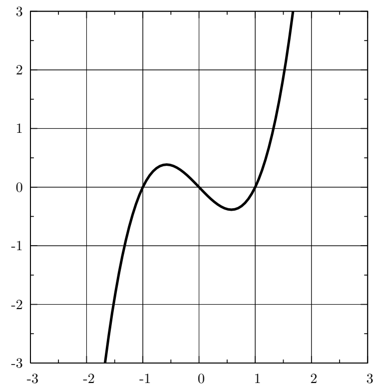
Question 10. Pour chacune des fonctions suivantes, notez en face le numéro du graphique sur lequel son graphe est esquissé, si celui-ci existe. /4

☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - x$

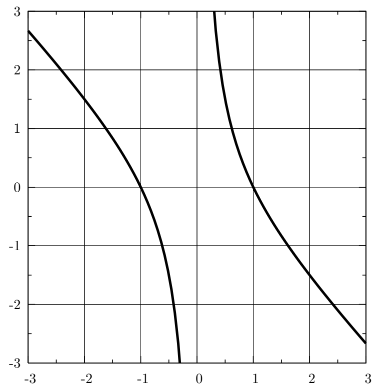
☐ $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - x$

☐ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x}$

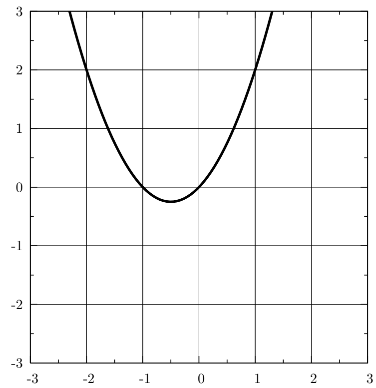
☐ $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x \sin \dfrac{10}{x}$



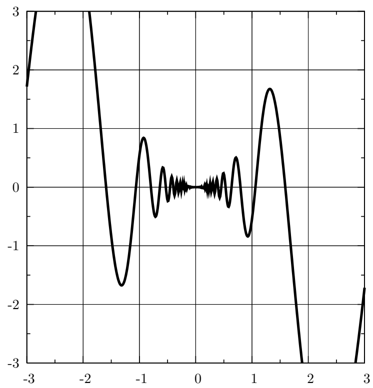
Graphique 1



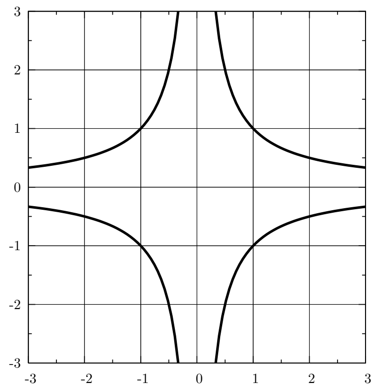
Graphique 2



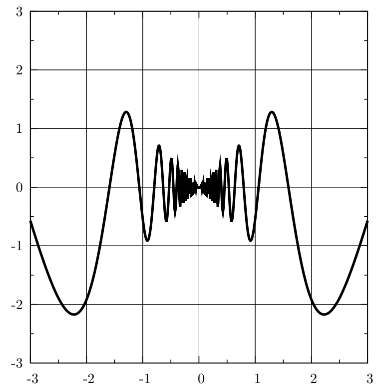
Graphique 3



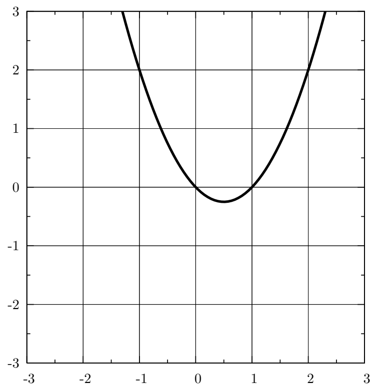
Graphique 4



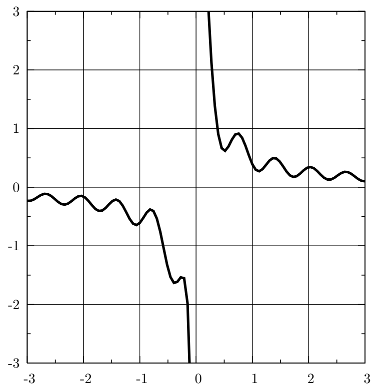
Graphique 5



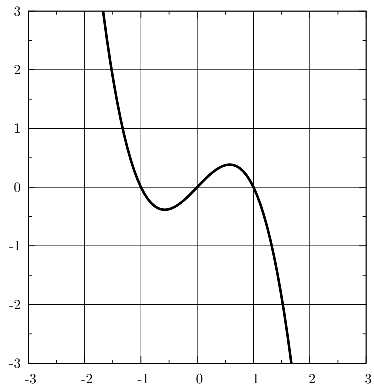
Graphique 6



Graphique 7



Graphique 8



Graphique 9

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11. Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point d'intersection des droites /6

$$D_1 \equiv x-2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{3}$$
$$D_2 \equiv (x,y,z) = (5,1,4) + \lambda(3,2,1), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

et parallèle à la droite $D_3 \equiv (x,y,z) = (1-2\lambda, 2-\lambda, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 12. Soit $S = \{(\lambda, 2\lambda, 2\lambda + 5) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires.

/5

(a) Combien d'inconnues le système compte-t-il ? Justifiez votre réponse.

(b) Le vecteur $(-1, -2, 4)$ est-il une solution de ce système ? Justifiez.

(c) Décrivez géométriquement l'ensemble S.

(d) Peut-on affirmer que l'ensemble $S = \{(\frac{\lambda}{2}, \lambda, \lambda + 5) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ représente également l'ensemble des solutions du système ? Justifiez.

Mathématique Élémentaire

Examen (16 août 2005)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13. La relation

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto u \text{ tel que } u^2 = z$$

définit-elle une fonction ? Justifiez votre réponse en détail. /3

Question 14. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leqslant f(n+1)$. Montrez par récurrence sur k que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leqslant f(n+k)$. /3