Test Introductif (Mathématique Élémentaire)

Test n° 1 (20 septembre 2004)

Correction

Question 1. *Un nombre est dit* rationnel *si et seulement si*

(a) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *c'est un nombre raisonnable ;*

(b) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *on peut l'écrire comme fraction de deux nombres entiers ;*

(c) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *il ne possède qu'un nombre fini de chiffres après la virgule ;*

(d) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *on peut l'écrire grâce à une formule faisant intervenir* $+$, $-$, $\times$, $/$, $\sqrt{\ }$.

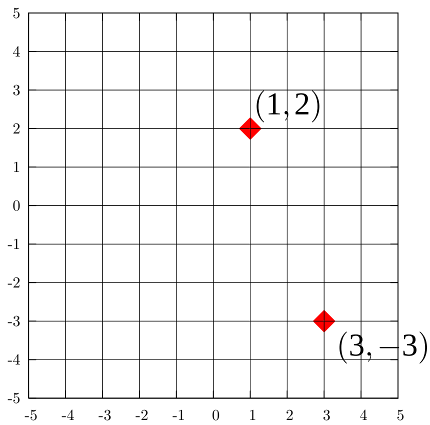
Donnez quelques exemples de nombres rationnels :

$$1, \quad 2, \quad 4{,}2, \quad 3/4, \quad 1/3$$

Donnez quelques exemples de nombres qui ne sont pas rationnels :

$$\sqrt{2}, \quad \pi, \quad \mathrm{e}$$

Question 2.



(a) *Tracez les points* $a = (1,2)$ *et* $b = (3,-3)$ *sur le graphique ci-contre (identifiez clairement les points).*

(b) *Calculez la distance entre a et b.*

$$\begin{aligned}\text{distance}(a,b) &= \sqrt{(1-3)^2 + (2-(-3))^2} \\ &= \sqrt{4+25} = \sqrt{29}\end{aligned}$$

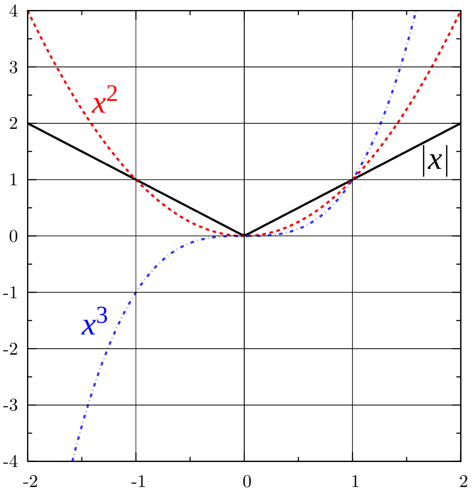
(c) *Donnez une équation (cartésienne) de la droite passant par* $(-1,\pi)$ *et* $(1,-1)$.

La pente p de cette droite est

$$p = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\pi - (-1)}{-1-1} = -\frac{\pi+1}{2}$$

et donc une équation sera $y - \pi = p\big(x - (-1)\big)$, ou encore

$$y = -\frac{\pi+1}{2}x + \frac{\pi-1}{2}.$$



Question 3. *Tracez sur le graphique ci-contre les graphes des trois fonctions suivantes :*

$$f(x) = |x|$$
$$g(x) = x^2$$
$$h(x) = x^3$$

Veillez à ce que la position des graphes les uns par rapport aux autres soit correcte.

REMARQUES :

- Lorsque $x \in]0,1[$, $x^3 < x^2 < x = |x|$.
- Si $x < 0$, alors $x^3 < 0$.

Question 4. *Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Donnez un bref argument qui explique votre choix.*

(a) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $0{,}999999\cdots = 1$ *(il y a une infinité de* 9*).*

Posons $x = 0{,}999999\cdots$. On a que $10x = 9{,}999999\cdots = 9 + x$. La relation $10x = 9 + x$ implique que $x = 1$.

(b) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *$y = ax + b$ est l'équation générale d'une droite. Autrement dit : toute droite du plan possède une équation de cette forme.*

Les droites verticales n'ont pas d'équation de cette forme. En effet, si $x = c$ est une équation d'une droite D verticale, on a par exemple que $(c, 0)$ et $(c, 1)$ appartiennent à D. Si D possédait une équation du type $y = ax + b$, on devrait avoir que $0 = ac + b$ et $1 = ac + b$, ce qui aurait pour conséquence $0 = 1$.

(c) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *Si a, b et c sont des* nombres réels *tels que $a \leqslant b$, alors $ac \leqslant bc$.*

Ceci n'est vrai que di $c \geq 0$. Pour $c < 0$, c'est faux comme le montre l'exemple suivant : $a := 1 \leqslant b := 2$, $c := -1$ et $ca = -1 > cb = -2$.

(d) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *Pour prouver qu'une propriété est vraie, il suffit de donner un exemple où elle est vérifiée.*

Ce n'est évidemment pas vrai. Affirmer qu'une propriété est vraie veut dire qu'elle l'est dans tous les cas de figure alors qu'un exemple ne vérifie qu'un seul d'entre eux.

À titre d'exemple, bien que (c) soit vérifié si on prend $a = b = c = 1$, il n'est pas vrai pour toutes les valeurs de a, b, c.

(e) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *La fonction $f(x) = ax + b$ possède toujours une seule racine (« toujours » s'entend : pour toutes les valeurs réelles de a et b)*

C'est vrai si $a \neq 0$. Si $a = 0$, on a $f(x) = b$ qui ne possède aucune racine si $b \neq 0$ et une infinité de racines (tout $x \in \mathbb{R}$ est racine) si $b = 0$.

Question 5. *Soit $f : [-7,7] \to \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous. Peut-on dire que*

(a) *Vrai* : ☑ *Faux* : ☐ $f(0) = 0$;

(b) *Vrai* : ☐ *Faux* : ☑ $f(1) = 0$;

(c) *Vrai* : ☑ *Faux* : ☐ $f(2) < 0$;

(d) *Vrai* : ☑ *Faux* : ☐ $f(6) > 0$;

(e) *Vrai* : ☑ *Faux* : ☐ $f(-4)f(2) > 0$;

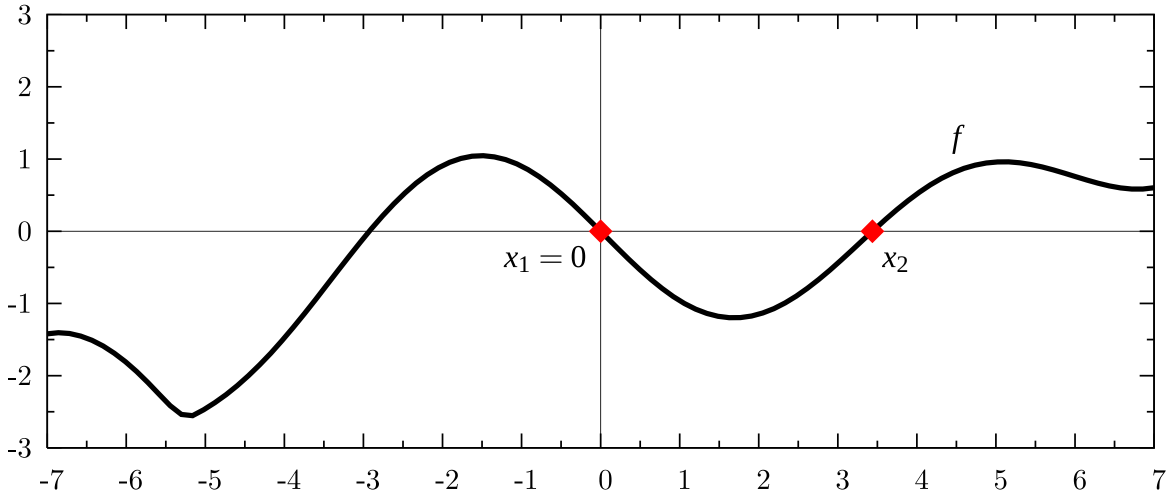
(f) *Vrai* : ☑ *Faux* : ☐ $[0,2] \subseteq \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant 0\}$;

(g) *Vrai* : ☑ *Faux* : ☐ *il existe* $x_1 \in \mathbb{R}$ *et* $x_2 \in \mathbb{R}$ *tels que* $x_1 \neq x_2$ *et* $f(x_1) = f(x_2)$;

(h) *Vrai* : ☐ *Faux* : ☑ *quel que soit* $x \in \mathbb{R}$, *si* $f(x) > 0$ *alors* $x > 0$;

(i) *Vrai* : ☑ *Faux* : ☐ *il existe* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *tels que* $f(x_1)f(x_2) < 0$;

(j) *Vrai* : ☑ *Faux* : ☐ *pour tout* $x \in [-2,4]$, $f(x) \geq -2$.



Veuillez expliquer votre démarche pour les points (g) et (h)

(g) est vrai car si on prend $x_1 = 0$ et x_2 la racine > 0 de f (voir graphique), on a que $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = 0 = f(x_2)$.

(h) On va exhiber un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > 0$ mais $x \leqslant 0$, ce qui montre bien que (h) n'est pas valable quel que soit x. Prenons $x = -2$. On a bien que $x \leqslant 0$ et le graphique montre que $f(x) > 0$.

Question 6. *Complétez :*

- *L'aire d'un disque de rayon R (voir Fig. 1) vaut* $\boxed{\pi R^2}$.
- *L'aire d'un « quartier » de disque de rayon R et d'ouverture α radians (voir Fig. 2) vaut* $\boxed{\frac{1}{2}\alpha R^2}$.
- *L'aire d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse a une longueur H et dont un angle opposé à l'angle droit est β (voir Fig. 3) est égale à* $\boxed{\frac{1}{2}H^2 \sin\beta\cos\beta = \frac{1}{4}H^2\sin(2\beta)}$.
- *L'aire d'une « lune » d'un disque de rayon R d'angle d'ouverture α (voir Fig. 4) vaut*

$$\boxed{\tfrac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)}.$$

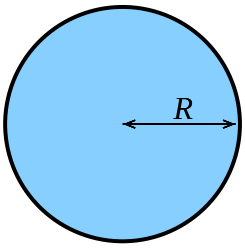


FIG. 1 – Disque

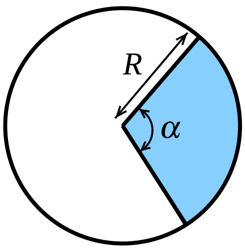


FIG. 2 – Quartier

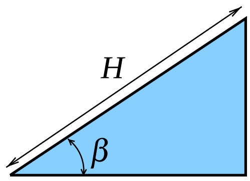


FIG. 3 – Triangle

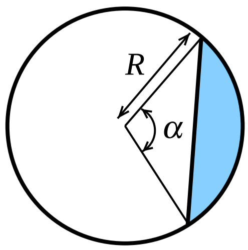
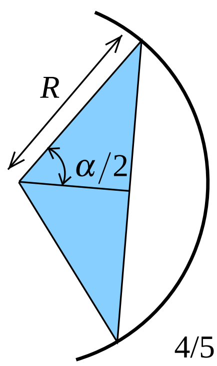


FIG. 4 – Lune

Veuillez détailler ci-dessous les calculs et raisonnements que vous faites.

- Le fait que πR^2 soit l'aire du disque est une formule bien connue.
- L'aire A du quartier d'ouverture α est à l'aire du disque comme α est à un tour complet, à savoir 2π. Autrement dit,
$$\frac{A}{\pi R^2} = \frac{\alpha}{2\pi}$$
ou encore $A = \frac{1}{2}\alpha R^2$.
- L'aire d'un triangle est $\frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{hauteur}$. Ici, la base vaut $H\cos\beta$ et la hauteur $H\sin\beta$. Par conséquent, l'aire du triangle vaut :
$$\frac{1}{2} \cdot H\cos\beta \cdot H\sin\beta.$$
Comme $\sin(2\beta) = 2\sin\beta\cos\beta$, cette quantité peut encore s'écrire $\frac{1}{2}H^2\frac{1}{2}\sin(2\beta)$.
- On doit soustraire de l'aire du quartier d'ouverture α celle du triangle. En divisant le triangle en deux triangles rectangles et en utilisant la seconde formule du point précédent, on obtient que l'aire du triangle initial vaut
$$2 \cdot \frac{1}{4}R^2 \sin\left(2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}R^2\sin\alpha$$
L'aire de la lune vaut donc $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}R^2\sin\alpha = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$.



Question 7. *Calculez la dérivée (par rapport à x) des fonctions suivantes :*

- $f(x) = 1 + x$
- $g(x) = 1 + x + \dfrac{1}{x}$
- $h(x) = \sqrt{x}$
- $\ell(x) = e^{\sin x}$
- $m(x) = (\cos x) \cdot e^x$

- $f'(x) = 1$
- $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$
- $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\ell'(x) = e^{\sin x} \cos x$
- $m'(x) = -\sin x e^x + \cos x e^x = (\cos x - \sin x)e^x$

Question 8. *Bart travaille pour une entreprise qui peint des dessins publicitaires sur les vitres des étalages. À Noël, il doit souvent peindre des arbres de Noël, des Pères Noël, des étoiles et des bonshommes de neige.*

Un jour, il dut peindre un Père Noël de 56 cm de haut sur la porte en verre de la boulangerie Dufour. À cet effet, il avait besoin de 60 ml de peinture. Un peu plus tard, il dut peindre une version beaucoup plus grande de ce Père Noël sur la vitre de l'étalage du supermarché Staes. Ce Père Noël devait mesurer 168 cm de haut.

Boulangerie Dufour

Supermarché Staes

Combien de peinture lui fallait-il ? Expliquez votre démarche par une phrase.

La quantité de peinture est proportionnelle à la surface à peindre. Or on dit que le Père Noël du supermarché Staes est « le même » (plus précisément, est homothétique) que celui de la boulangerie Dufour en plus grand. Puisque le Père Noël du supermarché Staes est $\frac{168}{56} = 3$ fois plus haut que celui de la boulangerie Dufour, il doit également être trois fois plus large. L'aire est donc multipliée par un facteur 3 pour la hauteur et un facteur 3 pour la largeur, soit un facteur 9 au total. Il en est de même pour la peinture. En conséquence, il faut $9 \cdot 60 = 540$ ml de peinture pour le Père Noël du supermarché Staes.