Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 2 (4 octobre 2004)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur. Des expressions telles que « on voit bien que... » ne sont *pas* des justifications.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soient $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ et $v = (v_1, v_2, \ldots, v_N) \in \mathbb{R}^N$.

- Définissez la norme de u, notée $\|u\|$.
- Montrez que $\|u\|^2 = u \cdot u$ où « $\cdot$ » désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^N$.
- Montrez que $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ si et seulement si u et v sont orthogonaux.

Mathématique Élémentaire

Test n° 2 (4 octobre 2004)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Soit la droite D passant par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) où $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ et $y_1 \neq y_2$ (il n'est par contre pas exclu que $x_1 = x_2$).

- Donnez une équation paramétrique et une équation cartésienne de D. Expliquez votre démarche.

- Donnez, en fonction de x_1, y_1, x_2, y_2, les coordonnées du point d'intersection entre D et l'axe des x. Expliquez.

Question 3. Prouvez que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.

Mathématique Élémentaire

Test n° 2 (4 octobre 2004)

Nom :

Prénom :

Section :

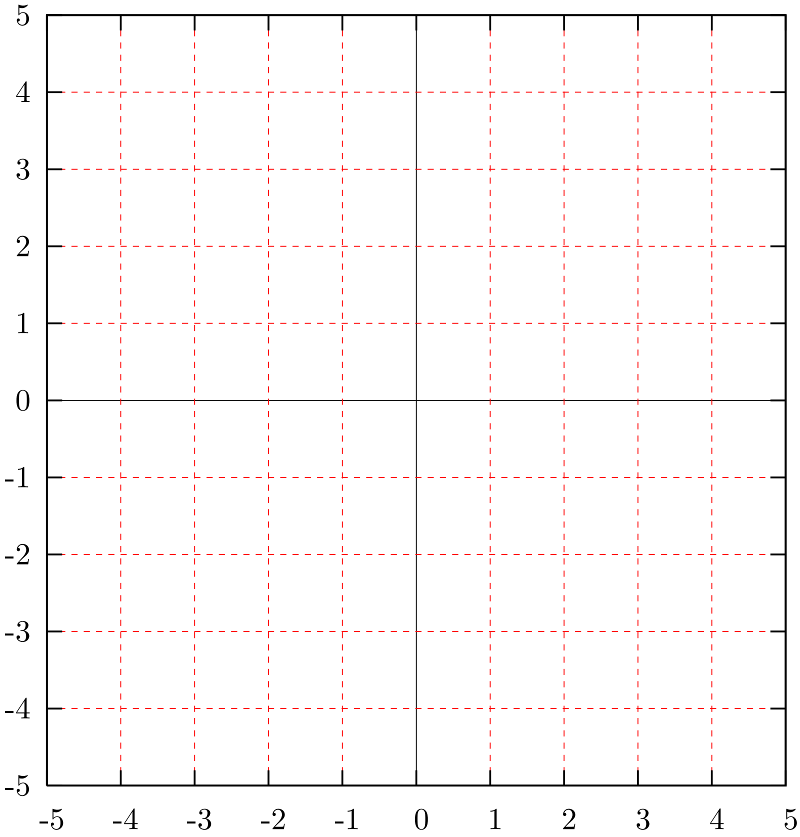
Question 4. Calculez et représentez graphiquement

(a) $(2+3\boldsymbol{i})+(1-\boldsymbol{i})$

(b) $(2+3\boldsymbol{i})-(1-\boldsymbol{i})$

(c) $(2+3\boldsymbol{i})\cdot(1-\boldsymbol{i})$

(d) $(1-\boldsymbol{i})^{-1}$



Mathématique Élémentaire

Test n° 2 (4 octobre 2004)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5.

- Donnez la forme trigonométrique de $2+3\boldsymbol{i}$, de $1-\boldsymbol{i}$, de $1+\boldsymbol{i}$, et de $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}$.

- Donnez toutes les valeurs distinctes prises par les puissances $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Question 6. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos choix.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $AB = 0 \Rightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 7.

- Donnez une équation cartésienne du plan α passant par $(\sqrt{2}, \pi, \mathrm{e})$ et parallèle au plan OYZ.

- Donnez une équation cartésienne du plan β passant par $(-1, 5, 2)$ et perpendiculaire à la droite $D \equiv (x, y, z) = (\lambda - 1, 3 - 2\lambda, 5 + 6\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Question 8. Calculez, si possible,

- $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} =$

- $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 6 \end{pmatrix} =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

- $z^2 = \boldsymbol{i}$

- $z^2 + 2z + 3 = 0$

Question 10. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| = 1$. Prouvez que les puissances z^n, $n \in \mathbb{N}$, ne prennent qu'un nombre fini de valeurs distinctes si et seulement si $\operatorname{Arg} z$ est de la forme $2\pi\ell_1/\ell_2$ avec $\ell_1 \in \mathbb{N}$ et $\ell_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.