Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 2 (4 octobre 2004)

Correction

Question 1. *Soient $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ et $v = (v_1, v_2, \ldots, v_N) \in \mathbb{R}^N$.*

- *Définissez la norme de u, notée $\|u\|$.*

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_N^2}$$

- *Montrez que $\|u\|^2 = u \cdot u$ où « $\cdot$ » désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^N$.*

  On a

$$\begin{aligned} u \cdot u &= (u_1, u_2, \ldots, u_N) \cdot (u_1, u_2, \ldots, u_N) \\ &= u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_N^2 && \text{par définition de « $\cdot$ »} \\ &= \|u\|^2 \end{aligned}$$

- *Montrez que $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ si et seulement si u et v sont orthogonaux.*

  Rappelons que deux vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si $u \cdot v = 0$. On a

$$\begin{aligned} &\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \\ &\text{ssi} \quad (u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + v \cdot v && \text{propriété ci-dessus} \\ &\text{ssi} \quad u\cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v = u \cdot u + v \cdot v && \text{distributivité du produit scalaire} \\ &\text{ssi} \quad u \cdot v + v \cdot u = 0 \\ &\text{ssi} \quad 2u \cdot v = 0 && \text{commutativité du produit scalaire} \\ &\text{ssi} \quad u \cdot v = 0 \\ &\text{ssi} \quad u \text{ et } v \text{ sont orthogonaux.} \end{aligned}$$

Question 2. *Soit la droite D passant par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) où $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ et $y_1 \neq y_2$ (il n'est par contre pas exclu que $x_1 = x_2$).*

- *Donnez une équation paramétrique et une équation cartésienne de D. Expliquez votre démarche.*

  Un point de D est, par exemple, (x_1, y_1) et un vecteur directeur de D est $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Une équation paramétrique de D est

$$(x, y) = (x_1, y_1) + \lambda(x_2 - x_1, y_2 - y_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

  On peut réécrire cette équation sous la forme

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \end{cases}$$

  On obtient une équation cartésienne en éliminant le paramètre. Par hypothèse, on a $y_2 - y_1 \neq 0$.

Si $x_2 = x_1$, alors
$$D \equiv x = x_1$$
(droite parallèle à l'axe des y).

Si $x_2 \neq x_1$ alors
$$D \equiv \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$
que l'on peut aussi écrire
$$D \equiv y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

- *Donnez, en fonction de x_1, y_1, x_2, y_2, les coordonnées du point d'intersection entre D et l'axe des x. Expliquez.*

  Le point d'intersection entre D et l'axe des x est de la forme $(x^*, 0)$. Pour trouver x^*, on remplace y par 0 dans l'équation de la droite D. On a
$$x^* = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y_1 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1}$$

Question 3. *Prouvez que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.*

Le conjugué $\bar{z}$ d'un complexe z de la forme $a + b\boldsymbol{i}$ (avec a, $b \in \mathbb{R}$) est, par définition, le complexe $a - b\boldsymbol{i}$.
Si z est réel, alors $b = 0$ et donc $z = \bar{z} = a$.
Réciproquement, si $z = \bar{z}$, par définition de l'égalité de deux complexes, on a $a = a$ et $b = -b$ (dans $\mathbb{R}$) c'est-à-dire $b = 0$ et donc z est un réel.

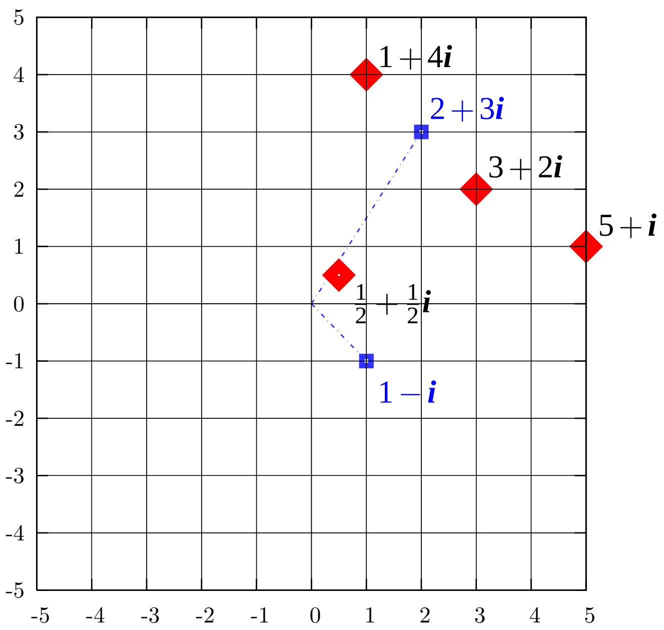
Question 4. *Calculez et représentez graphiquement*

(a) $(2 + 3\boldsymbol{i}) + (1 - \boldsymbol{i})$

(b) $(2 + 3\boldsymbol{i}) - (1 - \boldsymbol{i})$

(c) $(2 + 3\boldsymbol{i}) \cdot (1 - \boldsymbol{i})$

(d) $(1 - \boldsymbol{i})^{-1}$



Calculs :

(a) $(2 + 3\boldsymbol{i}) + (1 - \boldsymbol{i}) = 3 + 2\boldsymbol{i}$

(b) $(2 + 3\boldsymbol{i}) - (1 - \boldsymbol{i}) = 1 + 4\boldsymbol{i}$

(c) $(2 + 3\boldsymbol{i}) \cdot (1 - \boldsymbol{i}) = 5 + \boldsymbol{i}$

(d) $(1 - \boldsymbol{i})^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}$

Question 5.

- *Donnez la forme trigonométrique de $2+3\boldsymbol{i}$, de $1-\boldsymbol{i}$, de $1+\boldsymbol{i}$, et de $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}$.*
  - $2+3\boldsymbol{i}=\sqrt{13}(\cos\theta+\boldsymbol{i}\sin\theta)$ avec $\theta=\arctan\frac{3}{2}$ (puisque $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$ et $\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$).
  - $1-\boldsymbol{i}=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+\boldsymbol{i}\sin\frac{7\pi}{4})$.
  - $1+\boldsymbol{i}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\boldsymbol{i}\sin\frac{\pi}{4})$.
  - $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}=\dfrac{1+\boldsymbol{i}}{\sqrt{2}}=\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{4}$.

- *Donnez toutes les valeurs distinctes prises par les puissances $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$.*

  Par le point précédent, on a $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}=\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$. On applique la formule de De Moivre pour le calcul des puissances, on obtient donc $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right)^n=\operatorname{cis}\frac{n\pi}{4}=\operatorname{cis}(\frac{n\pi}{4}\bmod 2\pi)$. Le terme $\frac{n\pi}{4}\bmod 2\pi$ prend 8 valeurs distinctes : 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, π, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{4}$. Les valeurs prises par $(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i})^n$ sont donc $\operatorname{cis}\frac{n\pi}{4}$, avec $n\in\{0,1,2,\cdots,7\}$ ou encore :

$$1,\quad \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i},\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i},\quad -1,\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i},\quad -\boldsymbol{i},\quad \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}.$$

Question 6. *Soient $A,B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos choix.*

(a) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

On a $(A+B)^2=(A+B)\cdot(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$. Or on a vu que le produit matriciel n'est pas commutatif. Autrement dit on n'a pas en général $AB+BA=2AB$ (se référer au point suivant où $BA=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=AB$).

(b) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $AB=0\Rightarrow(A=0 \text{ ou } B=0)$

Prenons $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$. On a $A\cdot B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $A\neq 0$ et $B\neq 0$.

Question 7.

- *Donnez une équation cartésienne du plan α passant par $(\sqrt{2}, \pi, \mathrm{e})$ et parallèle au plan OYZ.*

  L'équation générale cartésienne d'un plan est de la forme $ax + by + cz = d$ où (a, b, c) est un vecteur normal du plan. Donc un plan qui est parallèle au plan OYZ admet $(1, 0, 0)$ comme vecteur normal. Ainsi, une équation du plan α est $x = d$ et on peut déterminer d puisque le point $(\sqrt{2}, \pi, \mathrm{e})$ appartient au plan α. On obtient finalement qu'une équation cartésienne du plan est $x = \sqrt{2}$.

- *Donnez une équation cartésienne du plan β passant par $(-1, 5, 2)$ et perpendiculaire à la droite $D \equiv (x, y, z) = (\lambda - 1, 3 - 2\lambda, 5 + 6\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

  La droite D admet $(1, -2, 6)$ comme vecteur directeur. On en conclut que tout plan qui est perpendiculaire à cette droite D admet $(1, -2, 6)$ comme vecteur normal au plan. Donc on obtient que l'équation cartésienne du plan β est de la forme $\beta \equiv x - 2y + 6z = d$ où d est un paramètre réel à déterminer (on a fait appel à la forme générale de l'équation cartésienne d'un plan à partir d'un vecteur normal). En effet puisque le point $(-1, 5, 2)$ appartient au plan β, nous trouvons la valeur de d qui est $d = -1 + 2 \cdot 5 + 6 \cdot 2 = 21$.

Question 8. *Calculez, si possible,*

- $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 6 \end{pmatrix}$$

  On a une matrice 2×2 qu'on veut multiplier à droite par une matrice 1×2. Puisque $1 \neq 2$, ce produit matriciel est impossible.

Question 9. *Résoudre dans $\mathbb{C}$:*

- $z^2 = \boldsymbol{i}$
- $z^2 + 2z + 3 = 0$

- Puisque $\boldsymbol{i} = \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$, on a clairement $(\operatorname{cis} \frac{\pi}{4})^2 = \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$ par la formule de De Moivre. Donc les solutions de $z^2 = \boldsymbol{i}$ sont $\operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ et $-\operatorname{cis} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}$.
- Le discriminant $\Delta = -8$. L'équation auxilliaire $Y^2 = -8$ a pour solutions $y_1 = 2\sqrt{2}\boldsymbol{i}$ et $y_2 = -2\sqrt{2}\boldsymbol{i}$. L'équation $z^2 + 2z + 3 = 0$ a donc pour solutions les complexes $\frac{-2+2\sqrt{2}\boldsymbol{i}}{2}$ et $\frac{-2-2\sqrt{2}\boldsymbol{i}}{2}$ ou encore $-1 + \sqrt{2}\boldsymbol{i}$ et $-1 - \sqrt{2}\boldsymbol{i}$.

Question 10. *Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| = 1$. Prouvez que les puissances z^n, $n \in \mathbb{N}$, ne prennent qu'un nombre fini de valeurs distinctes si et seulement si* $\operatorname{Arg} z$ *est de la forme $2\pi\ell_1/\ell_2$ avec $\ell_1 \in \mathbb{N}$ et $\ell_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

Puisque z est de module 1, z est de la forme $\operatorname{cis}(\operatorname{Arg} z)$. L'application de la formule de De Moivre fournit $z^n = \operatorname{cis}\big(n(\operatorname{Arg} z) \bmod 2\pi\big)$. Si $\operatorname{Arg} z = \frac{\ell_1 2\pi}{\ell_2}$, le terme $n(\operatorname{Arg} z) \bmod 2\pi$, $n \in \mathbb{N}$, prend au plus les valeurs distinctes suivantes : $n\frac{\ell_1 2\pi}{\ell_2}$ avec $n \in \{0, \cdots, \ell_2 - 1\}$. Il y a donc au plus ℓ_2 valeurs distinctes pour les z^n.

Réciproquement si les z^n ne prennent qu'un nombre fini de valeurs distinctes, cela signifie qu'il en est de même pour le terme $n(\operatorname{Arg} z) \bmod 2\pi$, c'est-à-dire qu'il existe $n_1 < n_2 \in \mathbb{N}$ vérifiant $n_1(\operatorname{Arg} z) \equiv n_2(\operatorname{Arg} z) \mod 2\pi$. Cette dernière égalité est vérifiée si et seulement si, par définition de modulo 2π, il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $(n_2 - n_1)(\operatorname{Arg} z) = \ell \cdot 2\pi$, c'est-à-dire $\operatorname{Arg}(z) = \frac{2\pi\ell}{n_2 - n_1}$.