

Mathématique Élémentaire

Test n° 2

(4 octobre 2004)

Correction

Question 1. Soient $u = (u_1, u_2, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ et $v = (v_1, v_2, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$.

- Définissez la norme de u , notée $\|u\|$.

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_N^2}$$

- Montrez que $\|u\|^2 = u \cdot u$ où $\langle \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire sur \mathbb{R}^N .

On a

$$\begin{aligned} u \cdot u &= (u_1, u_2, \dots, u_N) \cdot (u_1, u_2, \dots, u_N) \\ &= u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_N^2 && \text{par définition de } \langle \cdot \rangle \\ &= \|u\|^2 \end{aligned}$$

- Montrez que $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ si et seulement si u et v sont orthogonaux.

Rappelons que deux vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si $u \cdot v = 0$. On a

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 \\ \text{ssi } (u + v) \cdot (u + v) &= u \cdot u + v \cdot v && \text{propriété ci-dessus} \\ \text{ssi } u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v &= u \cdot u + v \cdot v && \text{distributivité du produit scalaire} \\ \text{ssi } u \cdot v + v \cdot u &= 0 \\ \text{ssi } 2u \cdot v &= 0 && \text{commutativité du produit scalaire} \\ \text{ssi } u \cdot v &= 0 \\ \text{ssi } u \text{ et } v &\text{ sont orthogonaux.} \end{aligned}$$

Question 2. Soit la droite D passant par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) où $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ et $y_1 \neq y_2$ (il n'est par contre pas exclu que $x_1 = x_2$).

- *Donnez une équation paramétrique et une équation cartésienne de D . Expliquez votre démarche.*

Un point de D est, par exemple, (x_1, y_1) et un vecteur directeur de D est $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Une équation paramétrique de D est

$$(x, y) = (x_1, y_1) + \lambda(x_2 - x_1, y_2 - y_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On peut réécrire cette équation sous la forme

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \end{cases}$$

On obtient une équation cartésienne en éliminant le paramètre. Par hypothèse, on a $y_2 - y_1 \neq 0$.

Si $x_2 = x_1$, alors

$$D \equiv x = x_1$$

(droite parallèle à l'axe des y).

Si $x_2 \neq x_1$ alors

$$D \equiv \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

que l'on peut aussi écrire

$$D \equiv y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

- *Donnez, en fonction de x_1, y_1, x_2, y_2 , les coordonnées du point d'intersection entre D et l'axe des x . Expliquez.*

Le point d'intersection entre D et l'axe des x est de la forme $(x^*, 0)$. Pour trouver x^* , on remplace y par 0 dans l'équation de la droite D . On a

$$x^* = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}y_1 = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{y_2 - y_1}$$

Question 3. Prouvez que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.

Le conjugué \bar{z} d'un complexe z de la forme $a + bi$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) est, par définition, le complexe $a - bi$.

Si z est réel, alors $b = 0$ et donc $z = \bar{z} = a$.

Réciproquement, si $z = \bar{z}$, par définition de l'égalité de deux complexes, on a $a = a$ et $b = -b$ (dans \mathbb{R}) c'est-à-dire $b = 0$ et donc z est un réel.

Question 4. Calculez et représentez graphiquement

(a) $(2 + 3i) + (1 - i)$

(b) $(2 + 3i) - (1 - i)$

(c) $(2 + 3i) \cdot (1 - i)$

(d) $(1 - i)^{-1}$

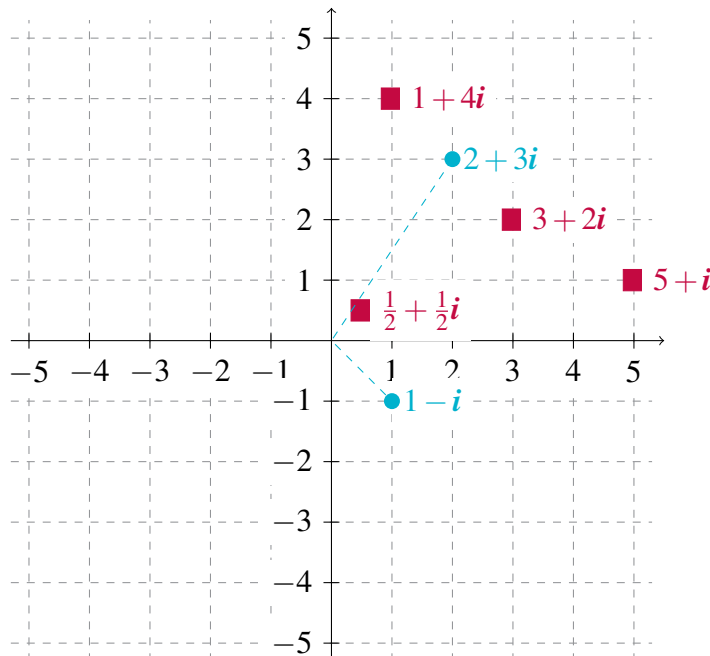
Calculs :

(a) $(2 + 3i) + (1 - i) = 3 + 2i$

(b) $(2 + 3i) - (1 - i) = 1 + 4i$

(c) $(2 + 3i) \cdot (1 - i) = 5 + i$

(d) $(1 - i)^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$



Question 5.

■ Donnez la forme trigonométrique de $2 + 3i$, de $1 - i$, de $1 + i$, et de $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

► $2 + 3i = \sqrt{13}(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\theta = \arctan \frac{3}{2}$ (puisque $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$ et $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$).

► $1 - i = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$.

► $1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$.

► $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \text{cis } \frac{\pi}{4}$.

■ Donnez toutes les valeurs distinctes prises par les puissances $(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Par le point précédent, on a $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \text{cis } \frac{\pi}{4}$. On applique la formule de De Moivre pour le calcul des puissances, on obtient donc $(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)^n = \text{cis } \frac{n\pi}{4} = \text{cis}(\frac{n\pi}{4} \text{ mod } 2\pi)$. Le terme $\frac{n\pi}{4} \text{ mod } 2\pi$ prend 8 valeurs distinctes : $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$. Les valeurs prises par $(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)^n$ sont donc $\text{cis } \frac{n\pi}{4}$, avec $n \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$ ou encore :

$$1, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad i, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad -1, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad -i, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Question 6. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos choix.

(a) Vrai : Faux : $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

On a $(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$. Or on a vu que le produit matriciel n'est pas commutatif. Autrement dit on n'a pas en général $AB + BA = 2AB$ (se référer au point suivant où $BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AB$).

(b) Vrai : Faux : $AB = 0 \Rightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$

Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On a $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

Question 7.

- Donnez une équation cartésienne du plan α passant par $(\sqrt{2}, \pi, e)$ et parallèle au plan OYZ.

L'équation générale cartésienne d'un plan est de la forme $ax + by + cz = d$ où (a, b, c) est un vecteur normal du plan. Donc un plan qui est parallèle au plan OYZ admet $(1, 0, 0)$ comme vecteur normal. Ainsi, une équation du plan α est $x = d$ et on peut déterminer d puisque le point $(\sqrt{2}, \pi, e)$ appartient au plan α . On obtient finalement qu'une équation cartésienne du plan est $x = \sqrt{2}$.

- Donnez une équation cartésienne du plan β passant par $(-1, 5, 2)$ et perpendiculaire à la droite $D \equiv (x, y, z) = (\lambda - 1, 3 - 2\lambda, 5 + 6\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$.

La droite D admet $(1, -2, 6)$ comme vecteur directeur. On en conclut que tout plan qui est perpendiculaire à cette droite D admet $(1, -2, 6)$ comme vecteur normal au plan. Donc on obtient que l'équation cartésienne du plan β est de la forme $\beta \equiv x - 2y + 6z = d$ où d est un paramètre réel à déterminer (on a fait appel à la forme générale de l'équation cartésienne d'un plan à partir d'un vecteur normal). Puisque le point $(-1, 5, 2)$ appartient au plan β , nous trouvons la valeur de d qui est $d = -1 - 2 \cdot 5 + 6 \cdot 2 = 1$.

Question 8. Calculez, si possible,

- $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} (-1 \ 6)$

On a une matrice 2×2 qu'on veut multiplier à droite par une matrice 1×2 . Puisque $1 \neq 2$, ce produit matriciel est impossible.

Question 9. Résoudre dans \mathbb{C} :

■ $z^2 = i$

■ $z^2 + 2z + 3 = 0$

■ Puisque $i = \text{cis } \frac{\pi}{2}$, on a clairement $(\text{cis } \frac{\pi}{4})^2 = \text{cis } \frac{\pi}{2}$ par la formule de De Moivre. Donc les solutions de $z^2 = i$ sont $\text{cis } \frac{\pi}{4}$ et $-\text{cis } \frac{\pi}{4} = \text{cis } \frac{5\pi}{4}$.

■ Le discriminant $\Delta = -8$. L'équation auxiliaire $Y^2 = -8$ a pour solutions $y_1 = 2\sqrt{2}i$ et $y_2 = -2\sqrt{2}i$. L'équation $z^2 + 2z + 3 = 0$ a donc pour solutions les complexes $\frac{-2+2\sqrt{2}i}{2}$ et $\frac{-2-2\sqrt{2}i}{2}$ ou encore $-1 + \sqrt{2}i$ et $-1 - \sqrt{2}i$.

Question 10. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| = 1$. Prouvez que les puissances z^n , $n \in \mathbb{N}$, ne prennent qu'un nombre fini de valeurs distinctes si et seulement si $\text{Arg } z$ est de la forme $2\pi\ell_1/\ell_2$ avec $\ell_1 \in \mathbb{N}$ et $\ell_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Puisque z est de module 1, z est de la forme $\text{cis}(\text{Arg } z)$. L'application de la formule de De Moivre fournit $z^n = \text{cis}(n(\text{Arg } z) \bmod 2\pi)$. Si $\text{Arg } z = \frac{\ell_1 2\pi}{\ell_2}$, le terme $n(\text{Arg } z) \bmod 2\pi$, $n \in \mathbb{N}$, prend au plus les valeurs distinctes suivantes : $n \frac{\ell_1 2\pi}{\ell_2}$ avec $n \in \{0, \dots, \ell_2 - 1\}$. Il y a donc au plus ℓ_2 valeurs distinctes pour les z^n .

Réciproquement si les z^n ne prennent qu'un nombre fini de valeurs distinctes, cela signifie qu'il en est de même pour le terme $n(\text{Arg } z) \bmod 2\pi$, c'est-à-dire qu'il existe $n_1 < n_2 \in \mathbb{N}$ vérifiant $n_1(\text{Arg } z) \equiv n_2(\text{Arg } z) \bmod 2\pi$. Cette dernière égalité est vérifiée si et seulement si, par définition de modulo 2π , il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $(n_2 - n_1)(\text{Arg } z) = \ell \cdot 2\pi$, c'est-à-dire $\text{Arg}(z) = \frac{2\pi\ell}{n_2 - n_1}$.