

Mathématique Élémentaire

Test n° 3

(11 octobre 2004)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur toutes les feuilles.

Veillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur. Des expressions telles que « on voit bien que... » ne sont *pas* des justifications.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Donnez, en fonction de $x \in \mathbb{R}$, le signe de l'expression $x(x - \pi)(x + 2)$. Justifiez votre résultat.

/2,5

Question 2. Cochez la case adéquate selon que vous pensez que les affirmations suivantes sont vraies ou fausses pour un $x \in \mathbb{R}$ arbitraire. (Il n'est pas demandé de justifier.)

/2,5

(a) Vrai : Faux : $\sqrt{x+2} \leq \sqrt{x+4} \Rightarrow x+2 \leq x+4$

(b) Vrai : Faux : $x|x| < x \Leftrightarrow |x| < 1$

(c) Vrai : Faux : $x > 0 \Rightarrow (|x| < 3 \Leftrightarrow x < 3)$

(d) Vrai : Faux : $|x| \leq 2 - x^3 \Rightarrow x^2 \leq (2 - x^3)^2$

(e) Vrai : Faux : $\text{sign}(x)|x| = x$ où, par définition, $\text{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 3. Donnez, en fonction de $m \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} 4x + y + 6z = 0 \\ -2mx + 2my + mz = 0 \end{cases}$$

Interprétez géométriquement vos résultats.

/6

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4. Écrivez les ensembles suivants sous forme d'une union d'intervalles (éventuellement infinis). Détaillez vos calculs.

- $A = \{x \in \mathbb{R} : (x \leq 2 \text{ ou } x \geq 4) \text{ et } (x \geq -1) \text{ et } (x \geq 0 \text{ ou } x \leq 5)\}$
- $B = \{x \in \mathbb{R} : (x \leq 2 + x) \text{ et } (x \leq 3 \text{ ou } 0 \cdot x \geq 1)\}$

/ 4

Question 5. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixé, soit $a + bi \in \mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $z_0^n = a + bi$. On pose

$$A := \{z \in \mathbb{C} : z^n = a + bi\}$$

$$U_n := \{u \in \mathbb{C} : u \text{ est solution de l'équation } z^n = 1\}$$

$$B := \{z_0 \cdot u : u \in U_n\}.$$

Prouvez que $A = B$.

/ 4

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 6. Résolvez de manière graphique *et* algébrique l'inéquation :

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}} \geq \sqrt{7-2x}$$

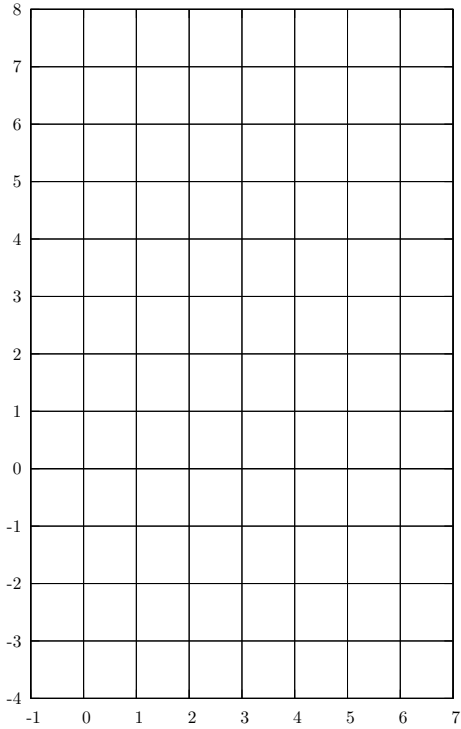
/5

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 7. Résolvez de manière graphique *et* algébrique l'inéquation :

/6

$$|x^2 - 4x| \leq x + 2$$

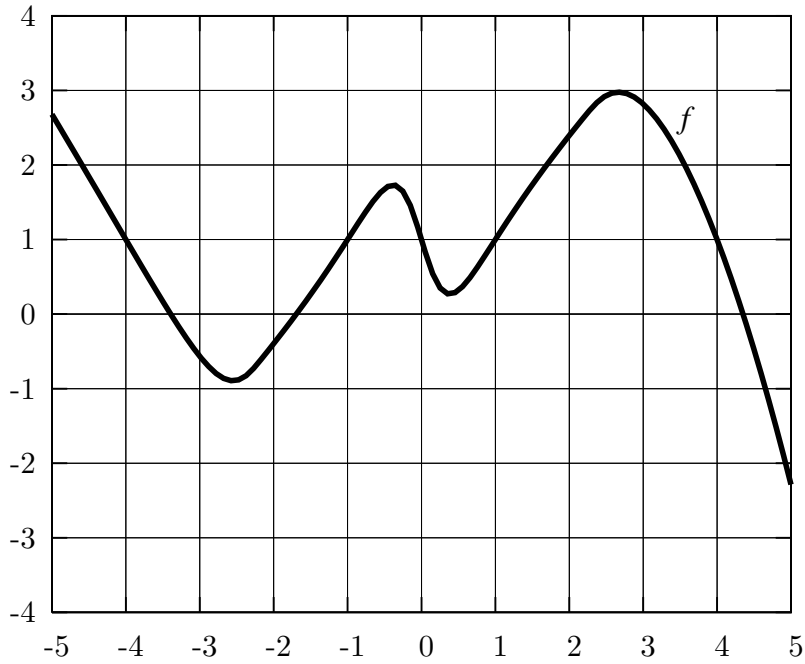


Question 8. Soit $f : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous. À partir de ce graphique, donnez l'ensemble

/ 4

$$\{x \in [-5, 5] : f(x) \leq 1\}.$$

Expliquez votre démarche.



Question 9. Soit $x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) un nombre complexe.

/6

(a) Lorsque $y \neq 0$, vérifiez que $\frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{2}} + \text{sign}(y)i \frac{\sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{2}}$ est solution de l'équation $z^2 = x + iy$.

(b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 = x + iy$ ($y = 0$ n'est ici pas exclu).

(c) Calculez $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$. (Rappel : $\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$.)

Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (11 octobre 2004)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.