Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 3 (11 octobre 2004) **Correction**

Question 1. *Donnez, en fonction de $x \in \mathbb{R}$, le signe de l'expression $x(x-\pi)(x+2)$. Justifiez votre résultat.*

Il s'agit d'un produit de trois termes. Le résultat sera donc nul dès qu'un des facteurs l'est. De plus le produit de deux termes de même signes est positif et le produit de deux termes de signes opposés est négatif. On a donc :

x		-2		0		π	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\pi$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x-\pi)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x(x-\pi)(x+2)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Question 2. *Cochez la case adéquate selon que vous pensez que les affirmations suivantes sont vraies ou fausses pour un $x \in \mathbb{R}$ arbitraire. (Il n'est pas demandé de justifier.)*

(a) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\sqrt{x+2} \leqslant \sqrt{x+4} \Rightarrow x+2 \leqslant x+4$

(b) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $x\,|x| < x \Leftrightarrow |x| < 1$

(c) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $x > 0 \Rightarrow (|x| < 3 \Leftrightarrow x < 3)$

(d) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $|x| \leqslant 2 - x^3 \Rightarrow x^2 \leqslant \left(2-x^3\right)^2$

(e) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\operatorname{sign}(x)\,|x| = x$ *où, par définition,* $\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Question 3. *Donnez, en fonction de $m \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions du système*

$$\begin{cases} 4x + y + 6z = 0 \\ -2mx + 2my + mz = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Interprétez géométriquement vos résultats.

La deuxième équation du système peut s'écrire $m(-2x+2y+z) = 0$.
Si $m = 0$, le système se réduit à l'équation $4x+y+6z = 0$, ou encore $y = -4x-6z$. L'ensemble S des solutions est alors

$$S = \left\{(\alpha, -4\alpha - 6\beta, \beta) \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Géométriquement, l'ensemble des solutions est le plan dont une équation cartésienne est $4x+y+6z = 0$.

Si $m \neq 0$, (1) est équivalent au système

$$\begin{cases} 4x+y+6z=0 & (2)\\ -2x+2y+z=0 & (3)\end{cases}$$

Pour éliminer x, par exemple, on effectue le transformation $(2)+2\cdot(3)$. On obtient $5y+8z=0$, c'est-à-dire $y=-\frac{8}{5}z$. En remplaçant dans (2), on trouve $x=-\frac{11}{10}z$. L'ensemble des solutions est alors

$$S=\Big\{\big(-\frac{11}{10}\alpha,-\frac{8}{5}\alpha,\alpha\big)\ \Big|\ \alpha\in\mathbb{R}\Big\}.$$

Géométriquement, on a deux plans qui se coupent selon la droite d'équation (paramétrique)

$$(x,y,z)=\alpha\Big(-\frac{11}{10},-\frac{8}{5},1\Big),\qquad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Question 4. *Écrivez les ensembles suivants sous forme d'une union d'intervalles (éventuellement infinis). Détaillez vos calculs.*

- $A=\big\{x\in\mathbb{R} : (x\leqslant 2 \text{ ou } x\geqslant 4) \text{ et } (x\geqslant -1) \text{ et } (x\geqslant 0 \text{ ou } x\leqslant 5)\big\}$
- $B=\big\{x\in\mathbb{R} : (x\leqslant 2+x) \text{ et } (x\leqslant 3 \text{ ou } 0\cdot x\geqslant 1)\big\}$

- A : Les ensembles correspondants aux différentes clauses des « et » sont représentés à la figure 1. Le « et » dit que les $x\in A$ doivent être dans ces trois ensembles à la fois. La figure 1 montre que c'est le cas si et seulement si $x\in[-1,2]\cup[4,+\infty[$. Autrement dit $A=[-1,2]\cup[4,+\infty[$.

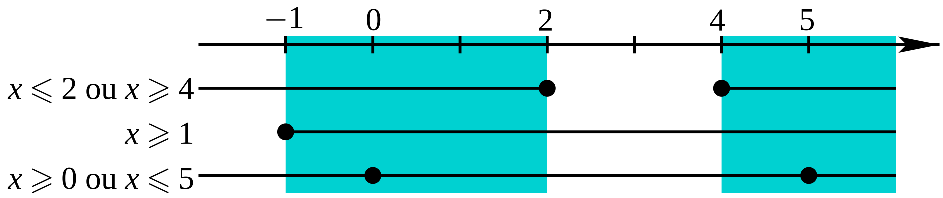


FIG. 1 – Clauses des « et »

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE (pas demandée) : Donner l'ensemble comme union signifie que l'expression le décrivant est une disjonction (des « ou ») d'autres formules logiques. On va donc distribuer les « et » sur les « ou » de manière à mettre ces derniers « à l'extérieur ».

$$\begin{aligned}
A &= \big\{x\in\mathbb{R} : (x\leqslant 2 \text{ ou } x\geqslant 4) \text{ et } (x\geqslant -1) \text{ et } (\underbrace{x\geqslant 0 \text{ ou } x\leqslant 5}_{\text{vrai quel que soit } x})\big\}\\
&= \big\{x\in\mathbb{R} : (x\leqslant 2 \text{ ou } x\geqslant 4) \text{ et } (x\geqslant -1)\big\}\\
&= \big\{x\in\mathbb{R} : (x\leqslant 2 \text{ et } (x\geqslant -1) \text{ ou } (\underbrace{x\geqslant 4 \text{ et } x\geqslant -1}_{\text{équivalent à } x\geqslant 4})\big\}\\
&= \big\{x\in\mathbb{R} : x\in[-1,2] \text{ ou } x\in[4,+\infty[\big\}\\
&= [-1,2]\cup[4,+\infty[
\end{aligned}$$

■ B : L'expression $x \leqslant 2+x$ est vraie quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Comme « vrai et P » est équivalent à « P », on a

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 3 \text{ ou } 0 \geqslant 1\}.$$

Maintenant $0 \geqslant 1$ est faux quel que soit $x \in \mathbb{R}$ et « P ou faux » étant équivalent à « P », il vient

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 3\} =]-\infty, 3].$$

Question 5. *Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixé, soit $a + b\boldsymbol{i} \in \mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $z_0^n = a + b\boldsymbol{i}$. On pose*

$$\begin{aligned} A &:= \{z \in \mathbb{C} : z^n = a + b\boldsymbol{i}\} \\ U_n &:= \{u \in \mathbb{C} : u \textit{ est solution de l'équation } z^n = 1\} \\ B &:= \{z_0 \cdot u : u \in U_n\}. \end{aligned}$$

Prouvez que $A = B$.

■ Si $a + b\boldsymbol{i} = 0 + 0\boldsymbol{i} = 0$.

Dans ce cas, on a clairement que $A = B = \{0\}$.

■ Si $a + b\boldsymbol{i} \neq 0 + 0\boldsymbol{i}$.

Dans ce cas, pour prouver l'égalité des deux ensembles A et B, on va prouver une double inclusion, c'est à dire $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

(a) $A \subseteq B$

Soit $z \in A$, c'est à dire que z est solution de l'équation :

$$X^n = a + b\boldsymbol{i} \tag{4}$$

On doit prouver que $z \in B$, c'est à dire que $z = z_0 \cdot u$ avec z_0 solution de l'équation (4) et u solution de l'équation :

$$X^n = 1 \tag{5}$$

Vu que nous sommes dans le cas où $a + b\boldsymbol{i} \neq 0$, on a clairement que toute solution de l'équation (4) est différente de 0. En particulier, z_0 est non nul, et on peut donc calculer son inverse ${z_0}^{-1}$. On peut alors écrire :

$$z = z_0 \cdot \frac{z}{z_0} = z_0 \cdot u$$

où $u = z \cdot {z_0}^{-1}$. Il reste à prouver que $u \in U_n$, c'est à dire que u est solution de (5).

$$\begin{aligned} u^n &= \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = \frac{z^n}{{z_0}^n} && \text{propriété des exposants} \\ &= \frac{a + b\boldsymbol{i}}{a + b\boldsymbol{i}} && \text{car } z \text{ et } z_0 \text{ sont solutions de (4)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ce qui prouve bien que $u \in U_n$ et donc que $z \in B$.

(b) $B \subseteq A$

Soit $z \in B$, c'est à dire que $z = z_0 \cdot u$ avec z_0 solution de l'équation (4) et u solution de l'équation (5). On doit prouver que $z \in A$, c'est-à-dire que z est solution de l'équation (4). Pour cela, il suffit de remplacer X par $z = z_0 \cdot u$ dans l'équation (4) :

$$\begin{aligned} z^n &= (z_0 \cdot u)^n = {z_0}^n \cdot u^n && \text{propriété des exposants} \\ &= (a + b\boldsymbol{i}) \cdot 1 && \text{car } z_0 \text{ est solution de (4) et } u \text{ est solution de (5)} \\ &= a + b\boldsymbol{i} \end{aligned}$$

On a donc bien que $z \in A$.

Question 6. *Résolvez de manière graphique* et *algébrique l'inéquation :*

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}} \geqslant \sqrt{7-2x} \tag{6}$$

Résolution algébrique : Pour que les expressions de (6) aient un sens, il faut que $x - 1 > 0$ (car il est sous une racine et au dénominateur) et $7 - 2x \geqslant 0$ (puisqu'il est sous une racine). Autrement dit, il faut que

$$x \in]1; 3{,}5].$$

Sous ces conditions, en multipliant les deux membres par $\sqrt{x-1}$ (ce qui ne change pas le sens de l'inégalité car c'est un nombre positif) et en élevant au carré (ce qui concerve l'équivalence car les deux membres de l'inégalité sont positifs), on trouve

$$\begin{aligned} (6) &\Leftrightarrow 2 \geqslant (7-2x)(x-1) \\ &\Leftrightarrow 2 \geqslant -2x^2 + 9x - 7 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 9 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Le polynôme $2x^2 - 9x + 9$ possède les deux racines $3/2$ et 3. Comme le signe du coefficient de x^2 est positif, $2x^2 - 9x + 9 \geqslant 0$ à l'extérieur des racines, c'est-à-dire

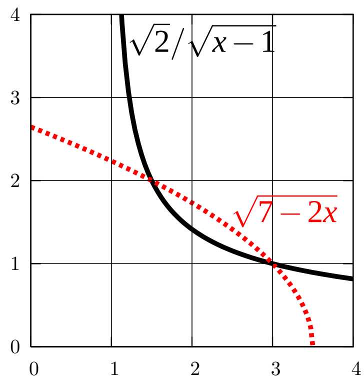
$$2x^2 - 9x + 9 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty; 3/2] \cup [3; +\infty[.$$

Cependant, on ne s'intéresse qu'aux x pour lesquels l'équation de départ (6) a un sens. La réponse finale est donc

$$(6) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \big(]-\infty; 3/2] \cup [3; +\infty[\big) \cap]1; 3{,}5] =]1; 3/2] \cup [3; 3{,}5]$$

Résolution graphique : Le graphique ci-contre dit que $\sqrt{2}/\sqrt{x-1}$ est au dessus de $\sqrt{7-2x}$ pour x entre 1 et un certain a et entre 3 et le moment où $\sqrt{7-2x}$ n'existe plus, à savoir 3,5. Pour déterminer a, il faut résoudre l'équation $\sqrt{2}/\sqrt{x-1} = \sqrt{7-2x}$, ce qui donne (les calculs sont les mêmes que ci-dessus) $a = 1{,}5$. On retouve donc bien que l'ensemble des solutions est

$$]1; 1{,}5] \cup [3; 3{,}5]$$



Question 7. *Résolvez de manière graphique* et *algébrique l'inéquation :*

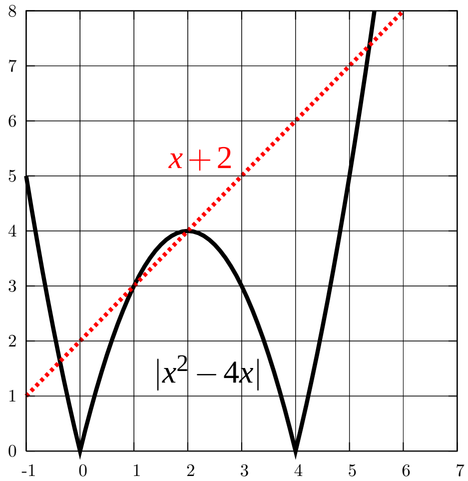
$$|x^2 - 4x| \leqslant x + 2 \tag{7}$$

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE : En utilisant $|x| \leqslant \rho \Leftrightarrow (x \geqslant -\rho$ et $x \leqslant \rho)$, on trouve

$$\begin{aligned}(7) \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x \geqslant -x - 2 \text{ et } x^2 - 4x \leqslant x + 2\\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \text{ et } x^2 - 5x - 2 \leqslant 0\end{aligned}$$

Le polynôme $x^2 - 3x + 2$ possède les racines 1 et 2 et $x^2 - 5x - 2$ a pour racines $(5 \pm \sqrt{33})/2$. Comme le coefficient de x^2 est positif, les deux polynômes sont positifs à l'extérieur des racines et négatifs à l'intérieur. Par conséquent,

$$\begin{aligned}(7) \quad &\Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty, 1\right] \cup \left[2, +\infty\right[\text{ et } x \in \left[\frac{5-\sqrt{33}}{2}, \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right]\\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left(\left]-\infty, 1\right] \cup \left[2, +\infty\right[\right) \cap \left[\frac{5-\sqrt{33}}{2}, \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right] = \left[\frac{5-\sqrt{33}}{2}, 1\right] \cup \left[2, \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right]\end{aligned}$$



RÉSOLUTION GRAPHIQUE : Le graphe de $x+2$ est au dessus de celui de $|x^2 - 4x|$ d'un $a \in \left]-1, 0\right[$ à 1 et de 2 à un $b \in \left]5, 6\right[$. Comme a et b sont situés dans la partie où $x^2 - 4x$ est $\geqslant 0$, il sont le solutions de $x^2 - 4x = x + 2$, c'est-à-dire

$$a = \frac{5-\sqrt{33}}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{5+\sqrt{33}}{2}.$$

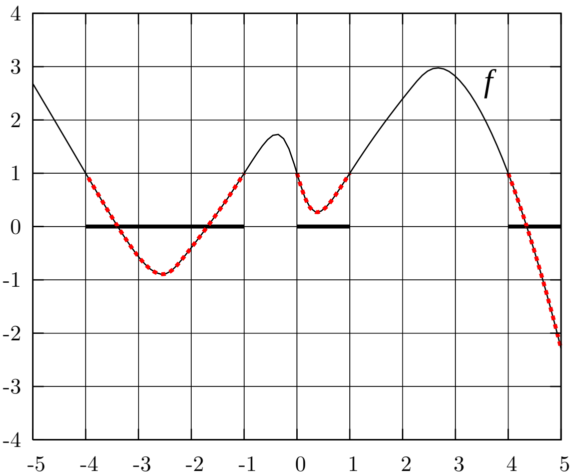
En conclusion

$$(7) \Leftrightarrow x \in [a, 1] \cup [2, b] = \left[\frac{5-\sqrt{33}}{2}, 1\right] \cup \left[2, \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right]$$

Question 8. *Soit* $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$ *la fonction dont le graphe est représenté ci-contre. À partir de ce graphique, donnez l'ensemble*

$$\{x \in [-5, 5] : f(x) \leqslant 1\}.$$

Expliquez votre démarche.



On recherche les x tels que $f(x)$ soit en dessous de la droite $y = 1$. La partie du graphe correspondant est surlignée sur le dessin ci-contre. Les x recherchés sont donc ceux allant de -4 à -1, de 0 à 1 et de 4 à 5. Par conséquent :

$$\{x \in [-5, 5] : f(x) \leqslant 1\} = [-4, -1] \cup [0, 1] \cup [4, 5]$$

Question 9. *Soit $x+\boldsymbol{i}y$ ($x,y\in\mathbb{R}$) un nombre complexe.*

(a) *Lorsque $y\neq 0$, vérifiez que* $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{2}}+\operatorname{sign}(y)\,\boldsymbol{i}\dfrac{\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{2}}$ *est solution de l'équation $z^2=x+\boldsymbol{i}y$.*

(b) *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2=x+\boldsymbol{i}y$ ($y=0$ n'est ici pas exclu).*

(c) *Calculez $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$. (Rappel : $\cos(\pi/4)+\boldsymbol{i}\sin(\pi/4)=\sqrt{2}/2+\boldsymbol{i}\sqrt{2}/2$.)*

Remarque préliminaire : les racines carrées sont bien définies puisque $x^2+y^2\geqslant 0$, $x+\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$, et $-x+\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$.

(a) Il s'agit de montrer que

$$\left(\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{2}}+\operatorname{sign}(y)\,\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{2}}\right)^2=x+\boldsymbol{i}y$$

c'est-à-dire de prouver l'égalité de deux complexes (c'est-à-dire l'égalité de leurs parties réelles et leurs parties imaginaires).

La partie réelle du premier membre est

$$\left(\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{2}}\right)^2-\big(\operatorname{sign}(y)\big)^2\left(\frac{\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{2}}\right)^2$$

ce que l'on peut réécrire

$$\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}-\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}=x=\text{ partie réelle du second membre.}$$

La partie imaginaire du premier membre est

$$2\cdot\left(\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{sign}(y)\left(\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}\right)$$

ce que l'on peut réécrire

$$\operatorname{sign}(y)\sqrt{-x^2+(x^2+y^2)}=\operatorname{sign}(y)\sqrt{y^2}=y=\text{partie imaginaire du second membre}$$

(pour l'avant dernière égalité, voir la question 2).

(b) Premier cas : $y=0$

On est donc ramené à résoudre (dans $\mathbb{C}$) $z^2=x$ où $x\in\mathbb{R}$.

- Si $x>0$ les solutions sont $z_1=\sqrt{x}$ et $z_2=-\sqrt{x}$.
- Si $x=0$ la solution (double) est $z_{1,2}=0$.
- Si $x<0$ les solutions sont $z_1=\boldsymbol{i}\sqrt{|x|}$ et $z_2=-\boldsymbol{i}\sqrt{|x|}$.

<u>Deuxième cas : $y \neq 0$</u>

La partie (a) de la question nous fournit une racine, l'autre est son opposée, c'est-à-dire :

$$-\left(\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{2}}+\operatorname{sign}(y)\,\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{2}}\right)$$

(c) $z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$ a pour solutions $\cos(\frac{\pi}{8})+\boldsymbol{i}\sin(\frac{\pi}{8})$ et $-\cos(\frac{\pi}{8})-\boldsymbol{i}\sin(\frac{\pi}{8})$ (formule de De Moivre). Mais les points (a) et (b) nous donnent aussi la forme algébrique des solutions ; ce sont

$$\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{1}}}{\sqrt{2}}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{1}}}{\sqrt{2}}, \tag{8}$$

et son opposé. $\operatorname{cis}(\frac{\pi}{8})$ est dans le premier quadrant (c'est à dire que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$ sont tous les deux positifs). Donc $\operatorname{cis}(\frac{\pi}{8})$ coïncide avec (8) et le calcul fournit

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{2}}$$

ou encore

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$