

Mathématique Élémentaire

Test n° 4

(18 octobre 2004)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur. Des expressions telles que « on voit bien que... » ne sont *pas* des justifications.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Prouvez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la somme de tous les nombres impairs de 1 à $2n - 1$ vaut n^2 .

/ 4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Résoudre, en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, le système suivant :

$$\begin{cases} -2x + y - 5z = 0 \\ 3\lambda x = \lambda(y + z) \end{cases}$$

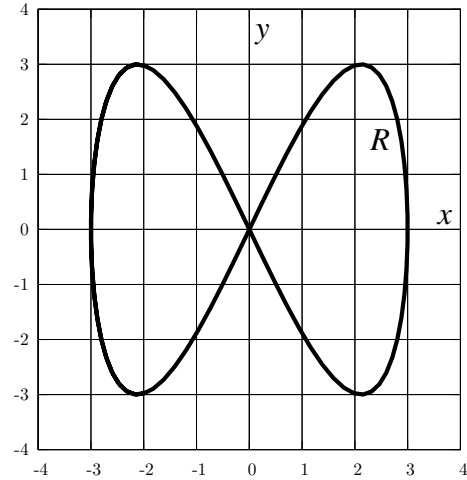
Interprétez géométriquement vos résultats.

/6

Question 3. Soit $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la relation dessinée sur la figure ci-contre. Cette relation définit-elle une fonction f ? Autrement dit,

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (y \text{ tel que } (x,y) \in R)$$

est-elle une fonction? Justifiez votre réponse.



/2

Question 4. Calculez les dérivées suivantes :

■ $\partial_x(\cos x + \sqrt{x}) =$

■ $\partial_t(e^{-t^2}) =$

■ $\partial_x\left(\frac{\cos(xy)}{\sqrt{\sin x}}\right) =$

■ $\partial_y\left(e^{xy^2} + \cos \frac{x}{y}\right) =$

/5

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

/6

Question 5. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la relation suivante définit-elle une fonction :

$$f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y \text{ tel que } y \geq 0 \text{ et } (y - |\lambda| + 1)^2 = x$$

Pour ces λ , calculez $\text{Dom } f_\lambda$.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6.

/ 4

- (a) Prouvez que les complexes $\text{cis}(2k\pi/n)$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$ sont les racines n^{e} de l'unité.
- (b) En déduire toutes les solutions complexes des équations $X^5 = 2$ et $X^4 = -1$.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

/ 3

Question 7. Soit $\Delta = q^2/4 + p^3/27$ et supposons que $\Delta \geq 0$. Prouver que

$$r = r_1 + r_2 \quad \text{avec} \quad r_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}} \quad \text{et} \quad r_2 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}$$

est solution de l'équation $z^3 + pz + q = 0$.