Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 4 (18 octobre 2004) **Correction**

Question 1. *Prouvez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la somme de tous les nombres impairs de 1 à $2n-1$ vaut n^2.*

Le cas initial est $n = 1$. Il est équivalent à montrer que $1 = 1^2$ (puisque $2 \cdot 1 - 1 = 1$). C'est trivialement vérifié.

Pour l'étape de récurrence, on suppose que l'assertion est vraie pour $1 \leqslant n \leqslant k$ (hypothèse de récurence), et on va montrer que la somme de tous les nombres impairs de 1 à $2(k+1)-1$ vaut $(k+1)^2$; c'est à dire

$$\sum_{j=1}^{k+1} (2j-1) = (k+1)^2.$$

Par hypothèse de récurence, on a

$$\sum_{j=1}^{k} (2j-1) = k^2.$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\sum_{j=1}^{k+1} (2j-1) = \sum_{j=1}^{k} (2j-1) + 2(k+1) - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

Par le principe de récurence, on a donc prouvé l'assertion quel que soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Question 2. *Résoudre, en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, le système suivant :*

$$\begin{cases} -2x + y - 5z = 0 \\ 3\lambda x = \lambda(y+z) \end{cases}$$

Interprétez géométriquement vos résultats.

Si $\lambda = 0$, la deuxième équation est trivialement vérifiée et le système se réduit à la première équation. Celle-ci peut s'écrire $y = 2x + 5z$. L'ensemble des solutions est donc

$$S = \big\{ (\alpha, 2\alpha + 5\beta, \beta) \;\big|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \big\}.$$

Il s'agit du plan d'équation $-2x + y - 5z = 0$.

Si $\lambda \neq 0$, on peut simplifier par λ dans la deuxième équation. Le système devient :

$$\begin{cases} -2x + y - 5z = 0 & (1) \\ 3x - y - z = 0 & (2) \end{cases}$$

Si on additionne les deux équations $(1) + (2)$, on obtient l'équation $x - 6z = 0$, c'est-à-dire $x = 6z$. En remplaçant dans (1), on obtient $y = 2x + 5z = 17z$. L'ensemble des solutions est donc

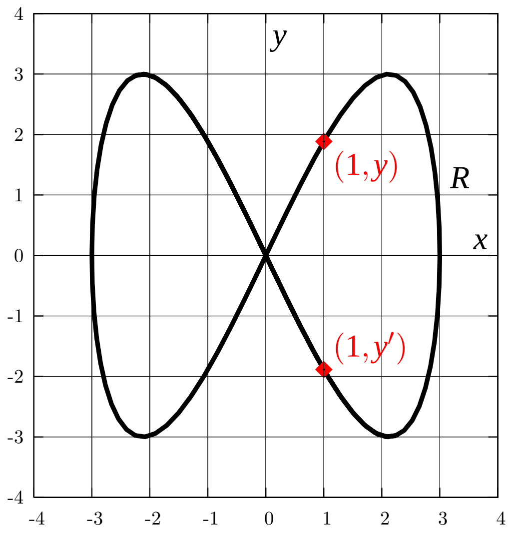
$$S = \big\{ (6\alpha, 17\alpha, \alpha) \;\big|\; \alpha \in \mathbb{R} \big\}.$$

Géométriquement, les deux plans d'équation $-2x + y - 5z = 0$ et $3x - y - z = 0$ se coupent suivant la droite D dont une équation (paramétrique) est $(x, y, z) = \alpha(6, 17, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Question 3. *Soit $R \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ la relation dessinée sur la figure ci-contre. Cette relation définit-elle une fonction f ? Autrement dit,*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \big(y \text{ tel que } (x,y) \in R\big)$$

est-elle une fonction ? Justifiez votre réponse.



R ne définit pas une fonction. En effet, $(1,y) \in R$ et $(1,y') \in R$ avec $y \neq y'$ ce qui contredit la définition de fonction (à un x doit correspondre au plus un y).

Question 4. *Calculez les dérivées suivantes :*

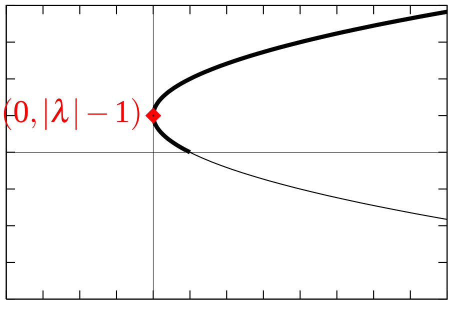
- $\partial_x(\cos x + \sqrt{x}) = -\sin x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\partial_t(e^{-t^2}) = -2t\,\mathrm{e}^{-t^2}$
- $\partial_x\left(\dfrac{\cos(xy)}{\sqrt{\sin x}}\right) = \dfrac{-\sin(xy)y\sqrt{\sin x} - \cos(xy)\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x}{\sin x} = \dfrac{-y\sin(x)\sin(xy) - \frac{1}{2}\cos(xy)\cos(x)}{(\sin x)^{3/2}}$
- $\partial_y\left(\mathrm{e}^{xy^2} + \cos\dfrac{x}{y}\right) = \mathrm{e}^{xy^2}\,\partial_x(xy^2) + \partial_u(\cos u)\restriction_{u=x/y}\partial_y\left(\dfrac{x}{y}\right) = \mathrm{e}^{xy^2}\,2xy + \left(-\sin\dfrac{x}{y}\right)\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)$
  $= 2xy\,\mathrm{e}^{xy^2} + \dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}$

Question 5. *Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la relation suivante définit-elle une fonction :*

$$f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y \text{ tel que } y \geqslant 0 \text{ et } (y - |\lambda| + 1)^2 = x$$

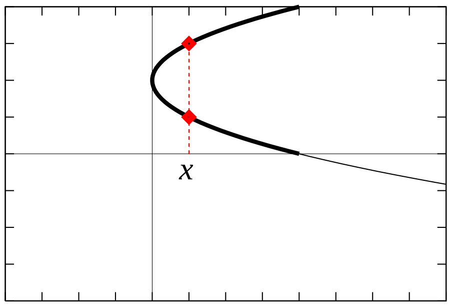
Pour ces λ, calculez $\operatorname{Dom} f_\lambda$.

Résolution graphique : Si on lit la relation $(y - |\lambda| + 1)^2 = x$ comme x donné en fonction de y, on voit qu'il s'agit d'une parabole dont le sommet est en $(x,y) = (0, |\lambda| - 1)$ — c'est une translatée verticale de la parabole $x = y^2$.



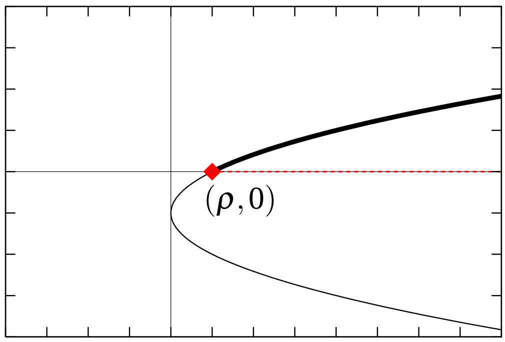
Or, on ne s'intéresse qu'aux $y \geqslant 0$.

Si $|\lambda|-1>0$ alors pour x proche de 0, il y a deux $y \geqslant 0$ différents qui lui correspondent ce qui veut dire que f_λ n'est pas une fonction.



Si $|\lambda|-1 \leqslant 0$ alors, à chaque x, il y a au plus un y qui lui correspond et donc f_λ est une fonction. Donc,

$$\begin{aligned} f_\lambda \text{ est une fonction } &\Leftrightarrow |\lambda| \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \lambda \in [-1,1] \end{aligned}$$



Le domaine de f_λ étant l'ensemble des x pour lesquels un y existe, le graphique montre qu'il sera de la forme $[\rho,+\infty[$ où $(\rho,0)$ vérifie $(y-|\lambda|+1)^2=x$, c'est-à-dire,

$$\mathrm{Dom}\, f_\lambda = \left[(|\lambda|-1)^2,+\infty\right[$$

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE[1] :
Si $x<0$, il n'y a aucune solution $y \in \mathbb{R}$ à l'équation $(y-|\lambda|+1)^2=x$.
Si $x \geqslant 0$, l'équation $(y-|\lambda|+1)^2=x$ possède deux solutions

$$y_1=\sqrt{x}+|\lambda|-1 \quad \text{et} \quad y_2=-\sqrt{x}+|\lambda|-1.$$

Parmi ces solutions, seules nous intéressent celles qui sont $\geqslant 0$. En fait, vu que f_λ est une fonction si et seulement si à chaque x correspond au plus un y, on

$$f_\lambda \text{ est une fonction} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \geqslant 0, \text{ au plus une des deux solutions est } \geqslant 0.$$

Or $y_1 \geqslant y_2$. Par conséquent, il faut et il suffit que $y_2<0$ pour avoir une fonction (sauf si $y_1=y_2$) :

$$f_\lambda \text{ est une fonction} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \geqslant 0,\ y_2<0 \text{ ou } y_1=y_2.$$

Comme $y_1=y_2 \Leftrightarrow x=0$, on a

$$\begin{aligned} f_\lambda \text{ est une fonction} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x>0,\ y_2<0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x>0,\ |\lambda|-1<\sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow \quad |\lambda|-1 \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad |\lambda| \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \in [-1,1] \end{aligned}$$

[1] Une des deux résolutions, graphique ou algébrique, suffit à répondre à cette question. Il est cependant impératif de pouvoir faire les deux.

Pour ces λ, la valeur de $f_\lambda(x)$ sera y_1 pour autant qu'il soit $\geqslant 0$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Dom} f_\lambda &= \{x \mid y_1 \geqslant 0\} = \big\{x \geqslant 0 \;\big|\; \sqrt{x} + |\lambda| - 1 \geqslant 0\big\} \\ &= \big\{x \geqslant 0 \;\big|\; x \geqslant (1-|\lambda|)^2\big\} = \big[(1-|\lambda|)^2, +\infty\big[\end{aligned}$$

Question 6.

(a) *Prouvez que les complexes* $\operatorname{cis}(2k\pi/n)$, $k \in \{0,\dots,n-1\}$ *sont les racines* n^{e} *de l'unité.*

(b) *En déduire toutes les solutions complexes des équations* $X^5 = 2$ *et* $X^4 = -1$.

(a) Il faut vérifier (par définition des racines n^{e} de l'unité) que $\big(\operatorname{cis}(\frac{2k\pi}{n})\big)^n = 1$ (pour $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$). Par la formule de De Moivre $\big(\operatorname{cis}(\frac{2k\pi}{n})\big)^n = \operatorname{cis}(2k\pi) = \operatorname{cis}(0) = 1$. Puisque les éléments $\operatorname{cis}(\frac{2k\pi}{n})$ avec $k \in \{0,\dots,n-1\}$ sont des complexes distincts, on a les n racines de l'équation $Z^n = 1$, c'est-à-dire les racines n^{e} de l'unité.

(b) Une solution de $X^5 = 2$ est $\sqrt[5]{2}$. D'autre part, par le point (a), les solutions de $X^5 = 1$ (dans $\mathbb{C}$) sont les $\operatorname{cis}(\frac{2k\pi}{5})$ ($k \in \{0,\dots,4\}$). Par un théorème[2] vu au cours, on en déduit que les racines complexes de $Z^5 = 2$ sont les $\sqrt[5]{2}\operatorname{cis}\big(\frac{2k\pi}{5}\big)$ ($k \in \{0,\dots,4\}$).

Une solution de $X^4 = -1 = \operatorname{cis}(\pi)$ est $\operatorname{cis}(\frac{\pi}{4})$. D'autre part, les solutions de $X^4 = 1$ sont — en vertu du point (a) — $\operatorname{cis}(\frac{2k\pi}{4})$ ($k \in \{0,\dots,3\}$). Donc par le théorème vu au cours,[3] on déduit que les racines de $X^4 = -1$ dans $\mathbb{C}$ sont les $\operatorname{cis}(\frac{\pi}{4}) \cdot \operatorname{cis}(\frac{2k\pi}{4})$ ($k \in \{0,\dots,3\}$), c'est-à-dire $\operatorname{cis}(\frac{\pi}{4})$, $\operatorname{cis}(\frac{3\pi}{4})$, $\operatorname{cis}(\frac{5\pi}{4})$ et $\operatorname{cis}(\frac{7\pi}{4})$.

Question 7.

Soit $\Delta = q^2/4 + p^3/27$ *et supposons que* $\Delta \geqslant 0$. *Prouver que*

$$r = r_1 + r_2 \quad \textit{avec} \quad r_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}} \quad \textit{et} \quad r_2 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}$$

est solution de l'équation $z^3 + pz + q = 0$.

Remarquons que r_1 et $r_2 \in \mathbb{R}$ et sont bien définis vu l'hypothèse $\Delta \geqslant 0$ et l'unicité de la racine cubique d'un réel.

Par définition de la notion de solution, il suffit de vérifier que $(r_1+r_2)^3 + p(r_1+r_2) + q = 0$. En utilisant la formule $(r_1+r_2)^3 = r_1^3 + 3r_1^2 r_2 + 3r_1 r_2^2 + r_2^3 = r_1^3 + 3r_1 r2(r_1+r_2) + r_2^3$ et le fait que $r_1 r_2 = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q)^2 - \Delta} = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}p^3} = -\frac{1}{3}p$ (par définition de Δ). On doit vérifier que

$$-\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta} + 3\big(-\tfrac{1}{3}p\big)(r_1+r_2) - \frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta} + p(r_1+r_2) + q = 0$$

ce qui est clairement le cas après simplifications.

[2] On peut l'énoncer comme suit. Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $z_0^n = a$. On a : z est solution de $z^n = a$ si et seulement si z s'écrit comme $z_0 \cdot u$ où u est une racine n^{e} de l'unité (i.e., $u^n = 1$).

[3] Cf. note en bas de page précédente.