

# Mathématique Élémentaire

Test n° 5

(25 octobre 2004)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur. Des expressions telles que « on voit bien que... » ne sont *pas* des justifications.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^{p \times p}$ . Montrez, par récurrence, que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$(A_1 A_2 \cdots A_n)^t = A_n^t \cdots A_2^t A_1^t$$

/ 3

Question 2. Soient  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  deux matrices inversibles. Montrez que  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

/ 3

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 3. On considère les nombres réels

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = \frac{1}{a}, \quad x_4 = 1 - a^2$$

dépendant (parfois) d'un paramètre  $a \in \mathbb{R}$ . Pour chacun des  $x_i$  ci-dessus, donner l'ensemble (éventuellement vide)  $A_i$  des  $a \in \mathbb{R}$  pour lesquels  $x_i$  est solution du système :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ ax^3 + (a^3 - 1)x^2 + (a^3 - a^2 - a)x = a^2 - 1 \end{cases} \quad (1)$$

Justifiez.

/7

Question 3 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Question 4. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (e^t, e^{-t})$ . Peut-on dire que

(a) Vrai :  Faux :   $\text{Im } f \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$

(b) Vrai :  Faux :   $\text{Im } f \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$

(c) Vrai :  Faux :   $\text{Im } f \supseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$

Justifiez chacune de vos réponses.

/5

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5. Résoudre, en discutant en fonction de  $a \in \mathbb{R}$ , le système suivant :

/7

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a^2 \end{cases}$$

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 6. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ . Donnez une équation cartésienne de la tangente au graphe de  $f$  au point  $(1, f(1))$ .

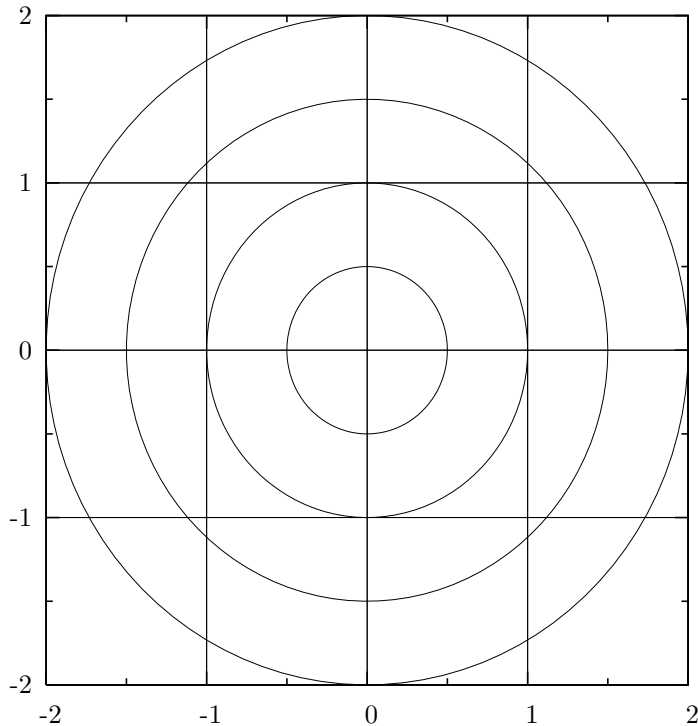
/ 3

Question 7. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (e^{-t}, \cos t)$ . Donnez une équation cartésienne de la tangente à l'image de  $f$  au point  $f(0)$ .

/ 4

Question 8. Calculer, dans  $\mathbb{C}$ , sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, les solutions de l'équation  $X^6 = -1$ . Représenter ces solutions graphiquement.

/5



Question 9. Calculez les sommes suivantes :

/3

■  $\sum_{k=-1}^n 1.$

■  $\sum_{k=1}^{16} (1 + i^k)$  où  $i^2 = -1.$