Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (25 octobre 2004) **Correction**

Question 1. *Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Montrez, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$,*

$$(A_1 A_2 \cdots A_n)^t = A_n^t \cdots A_2^t A_1^t \tag{1}$$

Le cas de base $n = 1$, affirme que $(A_1)^t = A_1^t$. C'est trivialement vérifié.
Étape de récurrence : Supposons que l'égalité (1) est vérifiée pour tous les naturels $n \leqslant k$ (avec $k \geqslant 1$) ; prouvons que sous cette hypothèse de récurrence, l'égalité (1) est vérifiée pour $n = k+1$, c'est-à-dire que

$$(A_1 A_2 \cdots A_k A_{k+1})^t = A_{k+1}^t A_k^t \cdots A_2^t A_1^t.$$

On a :

$$\begin{aligned}
(A_1 A_2 \cdots A_k A_{k+1})^t &= \big((A_1 A_2 \cdots A_k) A_{k+1}\big)^t && \text{associativité du produit matriciel}\\
&= A_{k+1}^t (A_1 A_2 \cdots A_k)^t && \text{car } (AB)^t = B^t A^t\\
&= A_{k+1}^t (A_k^t \cdots A_2^t A_1^t) && \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= A_{k+1}^t A_k^t \cdots A_2^t A_1^t && \text{associativité du produit matriciel}
\end{aligned}$$

Question 2. *Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ deux matrices inversibles. Montrez que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Par définition $(AB)^{-1}$ est *la* matrice C telle que $C(AB) = (AB)C = \mathbb{1}_n$. Il suffit donc de vérifier que $(B^{-1}A^{-1})(AB) = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = \mathbb{1}_n$. Vérifions le :

$$\begin{aligned}
(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B && \text{associativité du produit matriciel}\\
&= B^{-1}\mathbb{1}_n B && \text{définition de l'inverse}\\
&= B^{-1}B && \text{définition de } \mathbb{1}_n\\
&= \mathbb{1}_n && \text{définition de l'inverse}
\end{aligned}$$

On montre de la même manière que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \mathbb{1}_n$.

Question 3. *On considère les nombres réels*

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -1, \quad x_3 = \frac{1}{a}, \qquad x_4 = 1 - a^2$$

dépendant (parfois) d'un paramètre $a \in \mathbb{R}$. Pour chacun des x_i ci-dessus, donner l'ensemble (éventuellement vide) A_i des $a \in \mathbb{R}$ pour lesquels x_i est solution du système :

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ ax^3 + (a^3-1)x^2 + (a^3-a^2-a)x = a^2 - 1 \end{cases} \tag{2}$$

Justifiez.

- x_1 est solution de (2) si et seulement si

$$\begin{cases} 0 \geqslant 0 \\ 0 = a^2 - 1 \end{cases}$$

  (on a remplacé x par x_1 dans (2)). Dès lors

$$A_1 = \{a \mid x_1 \text{ est solution de } (2)\} = \{a \mid a^2 - 1 = 0\} = \{a \mid a = 1 \text{ ou } a = -1\} = \{-1, 1\}.$$

- x_2 est strictement négatif ($x_2 < 0$) et ne vérifie donc jamais la première inéquation de (2). Par conséquent, quel que soit $a \in \mathbb{R}$, x_2 n'est jamais solution de (2), c'est-à-dire $A_2 = \varnothing$.
- Pour que x_3 ait un sens, il faut que $a \neq 0$. En remplaçant x par x_3 dans la seconde équation de (2), on voit qu'elle est toujours satisfaite ; en effet :

$$a\,a^{-3} + (a^3-1)\,a^{-2} + (a^3-a^2-a)\,a^{-1} = a^{-2} + a - a^{-2} + a^2 - a - 1 = a^2 - 1$$

  Dès lors, x_3 sera solution de (2) si et seulement si x_3 satisfait l'inégalité $x \geqslant 0$. Donc

$$A_3 = \left\{a \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{a} \geqslant 0\right\} = \{a \mid a \neq 0 \text{ et } a \geqslant 0\} =]0, +\infty[.$$

- De nouveau en remplaçant x par x_4 dans la seconde équation de (2), on voit qu'elle est toujours satisfaite ; en effet :

$$\begin{aligned} &a(1-a^2)^3 + (a^3-1)(1-a^2)^2 + (a^3-a^2-a)(1-a^2) \\ &\qquad = \big(a^5 - 2a^3 + a - a^5 + a^3 - a^2 - 1 + a^3 - a^2 - a\big)(1-a^2) = -(1-a^2) \end{aligned}$$

  D'où

$$A_4 = \{a \mid x_4 \geqslant 0\} = \{a \mid 1 - a^2 \geqslant 0\} = \{a \mid a^2 \leqslant 1\} = [-1, 1].$$

Question 4. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t})$. *Peut-on dire que*

(a) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\operatorname{Im} f \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$

(b) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\operatorname{Im} f \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$

(c) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $\operatorname{Im} f \supseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$

Justifiez chacune de vos réponses.

(a) Si $(x,y) \in \operatorname{Im} f$, on a par définition que $(x,y) = f(t) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t})$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$. Dès lors

$$x = \mathrm{e}^t \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y = \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$$

ce qui montre que (x,y) est un élément de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$.

(b) De nouveau, $(x,y) \in \operatorname{Im} f$ implique que $x = \mathrm{e}^t$ et $y = \mathrm{e}^{-t}$ pour un $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent $x \cdot y = \mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{t-t} = e^0 = 1$ ce qui montre que (x,y) est point de l'hyperbole $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$.

(c) $(-1,-1) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ (vu que $(-1)(-1) = 1$) mais n'est pas un élément de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$ et donc à fortiori pas non plus de $\operatorname{Im} f$ au vu du point (a).

Question 5. *Résoudre, en discutant en fonction de* $a \in \mathbb{R}$, *le système suivant :* $\begin{cases} x+y+az = 1 \\ x+ay+z = a \\ ax+y+z = a^2 \end{cases}$

La matrice augmentée du système est : $[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & a^2 & a^2 \end{array}\right)$. Échelonnons cette matrice :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a^2-a \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{array}$$

<u>1[er] cas : $a \neq 1$</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a & -a \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2/(a-1) \\ L_3 \leftarrow L_3/(1-a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & -a-1 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

<u>Si $a \neq 2$</u>, on peut diviser la troisième ligne par $a+2$, ce qui donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-a-1}{a+2} \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3/(a+2)$$

De la 3e ligne, on a $z = \dfrac{-a-1}{a+2}$.
De la 2e ligne, on a $y = 1 + z = \dfrac{1}{a+2}$.
De la 1re ligne, on a $x = 1 - y - az = \dfrac{(a+1)^2}{a+2}$.
Donc l'ensemble S des solutions vaut

$$S = \Big\{ \Big(\frac{(a+1)^2}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{-a-1}{a+2} \Big) \Big\}.$$

Si $a = -2$, la matrice échelonnée devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La dernière ligne correspond à l'équation $0 = 1$. Le système est donc impossible, c'est-à-dire que l'ensemble S de ses solutions est vide : $S = \varnothing$.

2e cas : $a = 1$
La matrice échelonnée devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La première ligne correspond à l'équation $x + y + z = 1$, c'est-à-dire $x = 1 - y - z$. Donc $S = \big\{ (1-\alpha-\beta, \alpha, \beta) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \big\}$.

Question 6. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Donnez une équation cartésienne de la tangente au graphe de f au point $\big(1, f(1)\big)$.*

Une équation cartésienne de la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$ s'ecrit

$$y = f(a) + \partial f(a)(x - a).$$

Ici, on a $a = 1$. On a par calcul que $f(1) = 1$ et $\partial f(1) = 2x|_{x=1} = 2$. Par conséquent, la réponse est

$$y = 1 + 2(x-1)$$

c'est-à-dire

$$y = 2x - 1.$$

Question 7. *Soit* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 : t\mapsto(\mathrm{e}^{-t},\cos t)$. *Donnez une équation cartésienne de la tangente à l'image de* f *au point* $f(0)$.

Une équation paramétrique de la tangente à l'image de f en $f(a)$ est $y=f(a)+\lambda\partial f(a)$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.
Ici $a=0$, $f(0)=\big(\mathrm{e}^0,\cos(0)\big)=(1,1)$ et $\partial f(0)=\big(-\mathrm{e}^{-t},-\sin(t)\big)\big|_{t=0}=(-1,0)$. Une équation paramétrique de la tangente recherchée est donc

$$(y_1,y_2)=(1,1)+\lambda(-1,0)\qquad\text{avec } \lambda\in\mathbb{R}$$

i.e.,

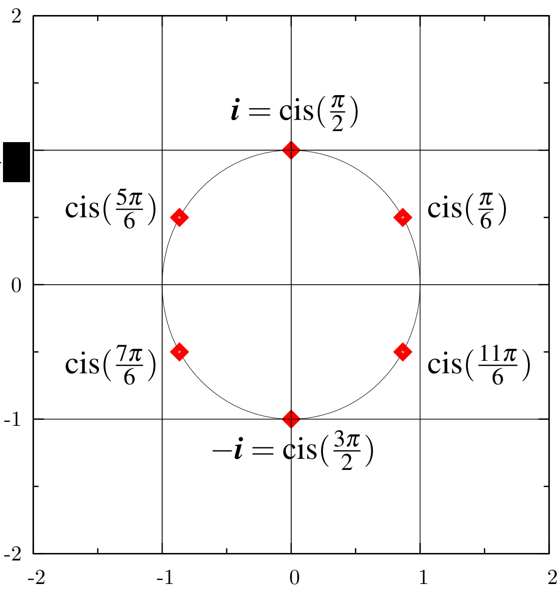
$$\begin{cases} y_1 = 1-\lambda \\ y_2 = 1 \end{cases}\qquad \text{avec } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Comme λ est arbitraire, y_1 peut prendre n'importe quelle valeur. Une équation cartésienne est dès lors $y_2=1$. (Voyez-vous que le calcul n'est rien d'autre que la preuve de l'égalité $\{(y_1,y_2)\mid \exists\lambda\in\mathbb{R},\ y_1=1-\lambda \text{ et } y_2=1\}=\{(y_1,y_2)\mid y_2=1\}$?)

Question 8. *Calculer, dans* $\mathbb{C}$, *sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, les solutions de l'équation* $X^6=-1$. *Représenter ces solutions graphiquement.*

Puisque $|-1|=1$, les solutions sont de module 1. Une solution particulière de $X^6=-1$ est $\boldsymbol{i}$. Les solutions sont donc les éléments de $\boldsymbol{i}\cdot U_6$ où U_6 est l'ensemble des solutions de $X^6=1$; c'est-à-dire $\operatorname{cis}(\frac{\pi}{2})$, $\operatorname{cis}(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{6})$, $\operatorname{cis}(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3})$, $\operatorname{cis}(\frac{\pi}{2}+\pi)$, $\operatorname{cis}(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3})$, $\operatorname{cis}(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{3})$, c'est-à-dire (dans l'ordre croissant des arguments) :

$$\operatorname{cis}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{1}{2}$$
$$\operatorname{cis}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)=\boldsymbol{i}$$
$$\operatorname{cis}\Big(\frac{5\pi}{6}\Big)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{1}{2}$$
$$\operatorname{cis}\Big(\frac{7\pi}{6}\Big)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\boldsymbol{i}\frac{1}{2}$$
$$\operatorname{cis}\Big(\frac{3\pi}{2}\Big)=-\boldsymbol{i}$$
$$\operatorname{cis}\Big(\frac{11\pi}{6}\Big)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\boldsymbol{i}\frac{1}{2}$$



Question 9. *Calculez les sommes suivantes :*

- $\sum_{k=-1}^{n} 1 = n+2 \quad$ (car l'indice k prend $n+2$ valeurs : $-1,\ 0,\ 1,\dots,n$)
- $\sum_{k=1}^{16}(1+\boldsymbol{i}^k) = \sum_{k=1}^{16} 1 + \sum_{k=1}^{16} \boldsymbol{i}^k = 16 + \frac{1-\boldsymbol{i}^{16+1}}{1-\boldsymbol{i}} - 1 = 16 + \frac{1-\boldsymbol{i}}{1-\boldsymbol{i}} - 1 = 16$. On a utilisé la formule pour les progressions géométriques $\sum_{k=1}^{16} z^k = \frac{1-z^{17}}{1-z}$ et le fait que $\boldsymbol{i}^4 = 1$ et donc $\boldsymbol{i}^{17} = (\boldsymbol{i}^4)^4\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}$.