Mathématique Élémentaire

Examen (31 octobre 2005)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (math, phys, ou info) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculer /5

- $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 2^k =$

- $\displaystyle\sum_{j=-1}^{t} (j^2 + t + 1) =$

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=2}^{\ell} \big(3(i-j)\big) =$

Mathématique Élémentaire

Examen (31 octobre 2005)

Nom :

Prénom :

Section :

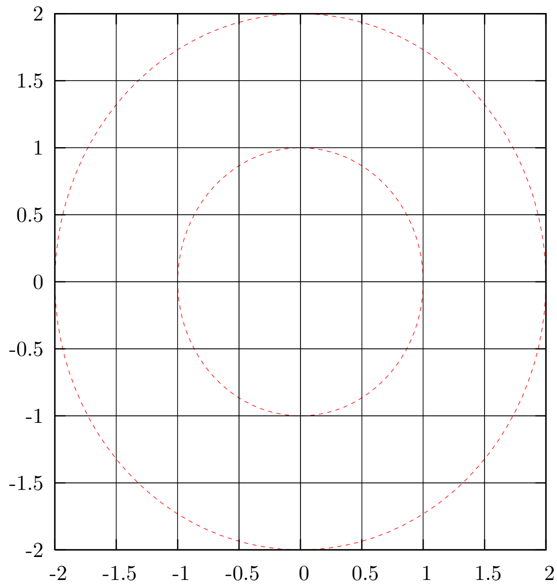
Question 2.

/8

- Calculez l'ensemble A des solutions de

$$Z^{12} = 1 \tag{1}$$

sous forme trigonométrique et représentez-les sur le graphique ci-dessous.



- Calculez l'ensemble B des solutions de

$$Z^4 = -\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{2}$$

et représentez-les sur le graphique ci-dessus.

- Vous constatez *visuellement* que $B \subseteq A$. Justifiez *algébriquement* cette inclusion.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Prouvez que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^{27}\,\overline{z^{27}}$ est réel. $/2$

Question 4. Calculez $\partial_x\big(\mathrm{e}^{\sqrt{x^2 \ln y + \ln x}}\big)$. $/4$

Question 5. Calculez $\partial_x(\operatorname{arctg} x)$. $/1$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Soit un système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Considérons $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matrice des coefficients du système. Supposons que $\det A \neq 0$.

/6

(a) Montrez que $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix}$.

(b) Montrez que l'unique solution du système est $\left(\dfrac{\det A_1}{\det A}, \dfrac{\det A_2}{\det A}\right)$ où, pour $j = 1, 2$, A_j est la matrice A dans laquelle on a remplacé la j^{e} colonne par la colonne $\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Effectuez les calculs suivants (lorsque c'est possible) : /6

- $(1+\boldsymbol{i})^{-1} =$
- $\overline{\boldsymbol{i}-27} =$
- $\begin{pmatrix} 1+\boldsymbol{i} & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} \\ 0 & 1-\boldsymbol{i} \end{pmatrix}^{-1} =$

Question 8. Donnez la table de vérité de $(A \wedge B \wedge C) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$ et donnez en une forme équivalente plus simple. /4

Question 9. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Montrez que si $AB = 0$ alors A ou B n'est pas inversible. /2

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Prouvez, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que, pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, on a

$/5$

$$\partial^k x^n = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

RAPPEL : Les dérivées d'ordre k sont définies par : $\partial^0 f := f$ et $\partial^{k+1} f := \partial(\partial^k f)$ pour $k \geqslant 0$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11. Écrivez l'ensemble suivant $A \subseteq \mathbb{R}$ sous la forme d'une union d'intervalles disjoints : /10

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{f(x)} \leqslant \frac{1}{|x|-2} \right\} \qquad \text{où } f(x) := \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Veillez à justifier les différentes étapes de vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Question 12. Cochez la case adéquate selon que vous pensez que les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses. /8

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by = c$, où $a \neq 0$ et $b \neq 0$, est $(b/a, 1)$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si le déterminant d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vaut α, alors le déterminant de la matrice $2A$ vaut 2α.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Un système impossible n'est jamais homogène.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ L'équation de la tangente au graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au point d'abscisse x_0 s'écrit $f(x) = f(x_0) + \partial_x f(x)(x - x_0)$.

Mathématique Élémentaire

Examen (31 octobre 2005)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13.

/8

(a) Soit A l'ensemble des vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ qui sont simultanément orthogonaux à $(2,1,-3)$ et à $(-1,1,4)$. Décrivez géométriquement cet ensemble. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

(b) Soit l'ensemble $B = \{(x,y,z) : (x,y,z)$ appartient à une droite dont un vecteur directeur est $(-7,5,-3)\}$. Montrez que A est contenu dans B.

(c) A-t-on $B \subseteq A$? Prouvez votre réponse (qu'elle soit positive ou négative).

Nom :

Prénom :

Section :

/7

Question 14. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Calculez, si possible, M^{-1}.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 14 (suite).

(b) Résolvez le système

$$\begin{cases} x+y-z=5 \\ x+6z=5 \\ x+y+5z=10 \end{cases}$$

Question 15. Prouvez que tout nombre complexe $\rho\cos\theta$, où $\rho \in [0,+\infty[$ et $\theta \in [0,2\pi[$, est le carré d'un complexe. Y a-t-il une seule façon d'écrire $\rho\cos\theta$ comme carré d'un complexe ? /4

Mathématique Élémentaire

Examen

(31 octobre 2005)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Supplément uniquement pour les étudiants faisant l'agrégation.

Question 1.

$/10$

- Soit $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$. Définissez en ε-δ la notion « f est continue en a ».

- En utilisant cette définition, prouvez que $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 1. La qualité de votre rédaction est importante.

Mathématique Élémentaire

Examen (31 octobre 2005)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite).

- En utilisant cette définition, prouvez que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0. La qualité de votre rédaction est importante.

Question 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction (pas nécessairement continue, ni inversible). Si I est un ensemble d'indices et, pour chaque $i \in I$, A_i est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, prouvez que /3

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$$

RAPPEL : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on définit $f^{-1}(A) := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in A\}$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Cochez la case adéquate selon que vous pensez que les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses par une preuve succincte ou un contre-exemple explicite. /7

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\max[0,1[= 1$

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\sqrt{4} = \pm 2$ car l'équation $x^2 = 4$ a pour solutions $+2$ et -2.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $\partial f(x) = 0$, alors x est un minimum local ou un maximum local de f.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Une fonction dérivable est continue mais la réciproque n'est pas toujours vrai.