Mathématique Élémentaire

Examen (31 octobre 2005) **Correction**

Question 1. *Calculer*

- $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}2^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}2^j2^{k-j} = (2+2)^k = 4^k$

  On peut aussi procéder comme suit : $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}2^k = 2^k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}1^j1^{k-j} = 2^k2^k = 2^{2k} = 4^k$.

- $\displaystyle\sum_{j=-1}^{t}(j^2+t+1) = (-1)^2 + \sum_{j=0}^{t} j^2 + \sum_{j=-1}^{t}(t+1) = 1 + \frac{t(t+1)(2t+1)}{6} + (t+2)(t+1)$

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{i=2}^{\ell}\big(3(i-j)\big) = \underbrace{\sum_{i=2}^{\ell}\big(3(i-1)\big)}_{\text{cas } j=1} + \underbrace{\sum_{j=2}^{\ell}\sum_{i=2}^{\ell}\big(3(i-j)\big)}_{=0} = 3\sum_{k=1}^{\ell-1}k = 3\frac{(\ell-1)\ell}{2}$

  car sommation de tous les éléments
  d'une matrice carrée antisymétrique

Question 2.

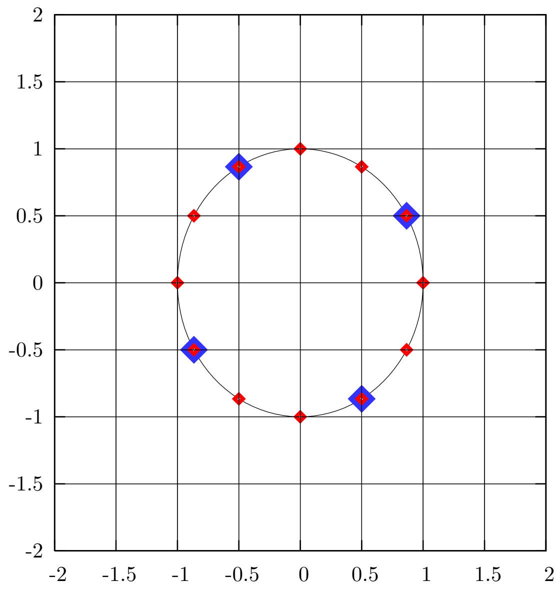
- *Calculez l'ensemble A des solutions de*

$$Z^{12} = 1 \tag{1}$$

sous forme trigonométrique et représentez-les sur le graphique ci-dessous.

Si z est une solution de $Z^{12} = 1$ et si $z = \rho\,\mathrm{cis}\,\theta$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, alors $(\rho\,\mathrm{cis}\,\theta)^{12} = 1$, c'est-à-dire (via les règles sur les exposants et De Moivre) $\rho^{12}\,\mathrm{cis}(12\theta) = 1 = 1\,\mathrm{cis}\,0$. Donc $\rho = 1$ et $\mathrm{cis}\,12\theta = \mathrm{cis}\,0$. On en déduit $\rho = 1$ puisque $\rho > 0$ et $12\theta = 0 \pmod{2\pi}$. On en déduit que $\theta = \frac{2k\pi}{12}$, $k \in \{0, \ldots, 11\}$, ou encore

$$A = \left\{\mathrm{cis}\,\frac{k\pi}{6} : k \in \{0, 1, \ldots, 11\}\right\}.$$



- *Calculez l'ensemble B des solutions de*

$$Z^4 = -\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{2}$$

et représentez-les sur le graphique ci-dessus.

Comme $-\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$, B est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : z^4 = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}\}$. Une solution particulière de cette équation est clairement $\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$ (car, par De Moivre, $(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6})^4 = \operatorname{cis}\frac{4\pi}{6} = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$). Donc $B = \operatorname{cis}\frac{\pi}{6} \cdot U_4$ où $U_4 = \{u \in \mathbb{C} : u^4 = 1\}$, c'est-à-dire $B = \big\{\operatorname{cis}\frac{\pi}{6} \cdot u : u \in \mathbb{C} \text{ et } u^4 = 1\big\} = \big\{\operatorname{cis}\frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{cis}\frac{\pi}{6} : k \in \{0,1,2,3\}\big\} = \{\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}, \operatorname{cis}\frac{4\pi}{6}, \operatorname{cis}\frac{7\pi}{6}, \operatorname{cis}\frac{10\pi}{6}\}$.

- *Vous constatez* visuellement *que* $B \subseteq A$. *Justifiez* algébriquement *cette inclusion.*

Il suffit de vérifier que tout élément de B est un élément de $A = \{z \in \mathbb{C} : z^{12} = 1\}$, c'est-à-dire que si $z^4 = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$ alors $z^{12} = 1$. Vérifions le :

$$\begin{aligned} z^{12} = (z^4)^3 &= \Big(\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}\Big)^3 && \text{(par l'hypothèse } z \in B) \\ &= 1^3 \end{aligned}$$

Donc $z \in A$ si $z \in B$.

Question 3. *Prouvez que, pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $z^{27}\,\overline{z^{27}}$ *est réel.*

On a vu au cours que, pour tout $w \in \mathbb{C}$, $w\overline{w} = |w|^2 \in \mathbb{R}$. Il suffit de particulariser à $w = z^{27}$.

Question 4. *Calculez* $\partial_x\big(\mathrm{e}^{\sqrt{x^2 \ln y + \ln x}}\big)$.

$$\begin{aligned} \partial_x\big(\mathrm{e}^{\sqrt{x^2 \ln y + \ln x}}\big) &= (\partial_z \mathrm{e}^z)\big|_{z=\sqrt{x^2\ln y + \ln x}}\, \partial_x\big(\sqrt{x^2 \ln y + \ln x}\big) \\ &= \mathrm{e}^z\big|_{z=\sqrt{x^2\ln y + \ln x}} \Big(\frac{\partial_x(x^2 \ln y + \ln x)}{2\sqrt{x^2 \ln y + \ln x}}\Big) \\ &= \mathrm{e}^{\sqrt{x^2 \ln y + \ln x}}\ \frac{2x\ln y + 1/x}{2\sqrt{x^2 \ln y + \ln x}} \\ &= \mathrm{e}^{\sqrt{x^2 \ln y + \ln x}}\ \frac{2x^2\ln y + 1}{2x\sqrt{x^2 \ln y + \ln x}} \end{aligned}$$

Question 5. *Calculez* $\partial_x(\operatorname{arctg} x)$.

$$\partial_x(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Question 6. *Soit un système de deux équations à deux inconnues*

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Considérons $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *la matrice des coefficients du système. Supposons que* $\det A \neq 0$.

(a) *Montrez que* $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix}$.

Il faut établir que $A^{-1}A = \mathbb{1}$ et $AA^{-1} = \mathbb{1}$. Il s'agit d'un simple calcul : comme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$, on a $\det A = ab' - a'b$ et

$$A^{-1}A = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} b'a-ba' & b'b-bb' \\ -a'a+aa' & -a'b+ab' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul établissant $AA^{-1} = \mathbb{1}$ est similaire.

(b) *Montrez que l'unique solution du système est* $\left(\frac{\det A_1}{\det A}, \frac{\det A_2}{\det A}\right)$ *où, pour* $j = 1,2$, A_j *est la matrice A dans laquelle on a remplacé la* j^e *colonne par la colonne* $\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$.

Comme le système s'écrit $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$, sa solution est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} b'c-bc' \\ ac'-a'c \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} c & b \\ c' & b' \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Question 7. *Effectuez les calculs suivants (lorsque c'est possible) :*

- $(1+\boldsymbol{i})^{-1} = \dfrac{1-\boldsymbol{i}}{1^2+1^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{i}$
- $\overline{\boldsymbol{i}-27} = -\boldsymbol{i}-27 = -27-\boldsymbol{i}$
- $\begin{pmatrix} 1+\boldsymbol{i} & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} \\ 0 & 1-\boldsymbol{i} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\boldsymbol{i} & -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} \\ 0 & 1+\boldsymbol{i} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{i} & -\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\boldsymbol{i} \\ 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i} \end{pmatrix}^{-1}$

  On a appliqué la formule donnée à la question 6 (a) avec ici $\det = (1+\boldsymbol{i})(1-\boldsymbol{i}) = 2$.

Question 8. *Donnez la table de vérité de $(A \wedge B \wedge C) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$ et donnez en une forme équivalente plus simple.*

A	B	C	$A \wedge B \wedge C$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$(A \wedge B \wedge C) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$
1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	1

La proposition $(A \wedge B \wedge C) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$ est fausse ssi A est vraie *et* B est vraie *et* C est vraie. Elle est donc vraie ssi A est fausse ou B est fausse ou C est fausse, c'est-à-dire ssi $\neg A$ est vraie ou $\neg B$ est vraie ou $\neg C$ est vraie. La proposition $(A \wedge B \wedge C) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$ est donc équivalente à $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$.

Question 9. *Soient $A, B \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Montrez que si $AB = 0$ alors A ou B n'est pas inversible.*

Si on suppose le contraire de la thèse, à savoir que A et B sont inversibles alors, de $AB = 0$, on déduit que $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}A^{-1}0 = 0$, c'est-à-dire que $\mathbb{1} = 0$. Cette contradiction montre que notre supposition de départ est fausse, c'est-à-dire que la thèse est vraie.

Question 10. *Prouvez, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que, pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\partial^k x^n = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

RAPPEL : *Les dérivées d'ordre k sont définies par : $\partial^0 f := f$ et $\partial^{k+1} f := \partial(\partial^k f)$ pour $k \geqslant 0$.*

Pour rendre parfaitement claire l'application du principe de récurrence, notons $P(k)$ la propriété

$$P(k): \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \partial_x^k x^n = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Il faut prouver qu'on a $P(k)$ quel que soit $k \in \mathbb{N}$.

- CAS DE BASE : il faut établir $P(0)$, c'est-à-dire que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \partial_x^0 x^n = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-0)!} x^{n-0} & \text{si } 0 \leqslant n \\ 0 & \text{si } 0 > n \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par le rappel ci-dessus, $\partial_x^0 x^n = x^n$. Pour le membre de droite, remarquons que le cas $0 > n$ ne se produit jamais puisque $n \in \mathbb{N}$. La seule valeur de ce membre est donc $\dfrac{n!}{(n-0)!} x^n = x^n$. L'égalité des deux membres est donc établie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

▪ PAS RÉCURSIF : On suppose que $P(k)$ est vrai pour tout $k \leqslant \ell$ et on montre que $P(\ell+1)$ est encore vrai. L'hypothèse d'induction est donc « pour tout $k \leqslant \ell$, $P(k)$ », c'est-à-dire

$$\text{pour tout } k \leqslant \ell \text{ et tout } n \in \mathbb{N}, \quad \partial_x^k x^n = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases} \tag{3}$$

On veut prouver $P(\ell+1)$, c'est-à-dire

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \partial_x^{\ell+1} x^n = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-(\ell+1))!}\, x^{n-(\ell+1)} & \text{si } \ell+1 \leqslant n \\ 0 & \text{si } \ell+1 > n \end{cases} \tag{4}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \partial_x^{\ell+1} x^n = \partial_x(\partial_x^\ell x^n) &= \partial_x \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-\ell)!}\, x^{n-\ell} & \text{si } \ell \leqslant n \\ 0 & \text{si } \ell > n \end{cases} && \text{par (3)} \\ &= \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-\ell)!}\, \partial_x(x^{n-\ell}) & \text{si } \ell \leqslant n \\ \partial_x 0 & \text{si } \ell > n \end{cases} \end{aligned}$$

Lorsqu'on dérive $x^{n-\ell}$, il faut faire attention au cas où $n = \ell$ car on a alors $\partial_x x^0 = \partial_x 1 = 0$. Séparons ce cas :

$$\partial_x^{\ell+1} x^n = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-\ell)!}\, \partial_x(x^{n-\ell}) & \text{si } \ell < n \\ \dfrac{n!}{(n-n)!}\, \partial_x(x^{n-n}) = 0 & \text{si } \ell = n \\ \partial_x 0 = 0 & \text{si } \ell > n \end{cases}$$

On a vu au cours que $\partial_x x^{n-\ell} = (n-\ell)x^{n-\ell-1}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \partial_x^{\ell+1} x^n &= \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-\ell)\,(n-\ell-1)!}\, (n-\ell)x^{n-\ell-1} & \text{si } \ell < n \\ 0 & \text{si } \ell \geqslant n \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-(\ell+1))!}\, x^{n-(\ell+1)} & \text{si } \ell < n \\ 0 & \text{si } \ell \geqslant n \end{cases} \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de remarquer que les propriétés $\ell < n$ et $\ell \geqslant n$ sont équivalentes respectivement à $\ell+1 \leqslant n$ et $\ell+1 > n$ (car ℓ et n sont des entiers) ; on peut donc les remplacer par ces dernières, ce qui établit (4).

Question 11. *Écrivez l'ensemble suivant $A \subseteq \mathbb{R}$ sous la forme d'une union d'intervalles disjoints :*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{f(x)} \leqslant \frac{1}{|x|-2} \right\} \qquad \text{où } f(x) := \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Veillez à justifier les différentes étapes de vos calculs.

CONDITIONS D'EXISTENCE : Il faut que les deux dénominateurs soient non nuls, c'est-à-dire que $f(x) \neq 0$ et $|x| \neq 2$. Il faut donc exclure les points 0, -2, 2.

RÉSOLUTION : Comme on désire multiplier l'inéquation par chacun des deux dénominateurs, il faut connaître leurs signes. Ceci est fait dans le tableau suivant. On donne aussi une forme équivalente de l'inéquation (on se rappelle que multiplier les deux membres d'une inéquation par une quantité négative change le sens de l'inégalité).

x		-2		0		2	
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\lvert x\rvert-2$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{1}{f(x)} \leqslant \dfrac{1}{\lvert x\rvert-2}$	$\underbrace{\lvert x\rvert-2}_{>0} \geqslant \underbrace{f(x)}_{<0}$		$\lvert x\rvert-2 \leqslant f(x)$ $-x-2 \leqslant -\sqrt{-x}$		$\underbrace{\lvert x\rvert-2}_{<0} \geqslant \underbrace{f(x)}_{>0}$		$\lvert x\rvert-2 \leqslant f(x)$ $x-2 \leqslant \sqrt{x}$

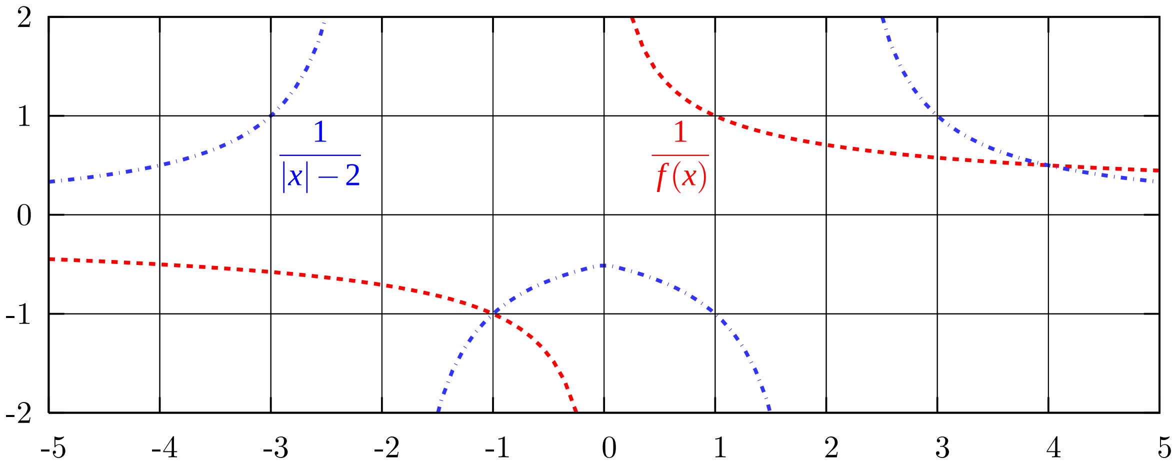
On voit qu'il faut distinguer quatre cas.

- $x \in]-\infty,-2[$. L'inéquation est satisfaite pour tous ces x (puisqu'une quantité positive est toujours $\geqslant$ qu'une quantité négative). L'ensemble des solutions sur cet intervalle est donc $]-\infty,-2[$.
- $x \in]-2,0[$. L'inéquation devient $\sqrt{-x} \leqslant x+2$. Comme les deux membres sont positifs, on peut élever au carré et obtenir l'inéquation équivalente $-x \leqslant (x+2)^2$ c'est-à-dire $x^2+5x+4 \geqslant 0$. Le polynôme a pour racines -4 et -1. Il est donc positif à l'extérieur des racines i.e., sur l'ensemble $]-\infty,-4] \cup [-1,+\infty[$. Comme on travaille sur $]-2,0[$, l'ensemble des solutions sur cet intervalle est $[-1,0[$.
- $x \in]0,2[$. Pour ces x, l'équation n'est jamais satisfaite (une quantité < 0 ne peut jamais être plus grande ou égale à une quantité > 0).
- $x \in]2,+\infty[$. L'inéquation devient $x-2 \leqslant \sqrt{x}$. Les deux membres étant positifs, elle est équivalente à $(x-2)^2 \leqslant x$ c'est-à-dire à $x^2-5x+4 \leqslant 0$. Les racines du polynôme étant 1 et 4, l'inéquation est satisfaite sur $[1,4]$ (le signe à l'intérieur des racines est l'opposé de celui du coefficient de x^2). L'ensemble des solutions pour ce cas est donc $]2,+\infty[\cap [1,4] =]2,4]$.

En remettant ensemble les solutions trouvées pour chacun des quatre cas ci-dessus, on trouve

$$A =]-\infty,-2[\cup [-1,0[\cup]2,4].$$

REMARQUE : On peut visualiser les solutions de l'inéquation grâce au graphique ci-dessous.



Question 12. *Cochez la case adéquate selon que vous pensez que les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.*

(a) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *Un vecteur directeur de la droite d'équation $ax+by=c$, où $a \neq 0$ et $b \neq 0$, est $(b/a, 1)$.*

PREMIÈRE RÉPONSE POSSIBLE : Un vecteur normal de la droite est (a,b). Tout vecteur directeur de la droite doit être orthogonal à (a,b). Si $(b/a,1)$ était un vecteur directeur, on devrait donc avoir $(a,b)\cdot(b/a,1)=0$. Or on a par calcul que $(a,b)\cdot(b/a,1)=2b\neq 0$. Ceci montre bien que $(b/a,1)$ ne peut être un vecteur directeur.

SECONDE RÉPONSE POSSIBLE : On a vu qu'un vecteur directeur de cette droite est $(-b,a)$. Tout autre vecteur directeur doit en être un multiple. Si $(b/a,1)$ était un vecteur directeur, on devrait donc avoir

$$(b/a,1)=\mu(-b,a) \text{ pour un certain } \mu\in\mathbb{R}.$$

Or ce n'est pas le cas car l'existence d'un tel μ impliquerait que $b/a=-b\mu$ et $\mu=1/a$, d'où $-1/a=\mu=1/a$ ce qui est impossible. Par conséquent $(b/a,1)$ ne peut être un vecteur directeur.

(b) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *Si le déterminant d'une matrice $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ vaut α, alors le déterminant de la matrice $2A$ vaut 2α.*

La multiplication de A par 2 donne une nouvelle matrice consistant en les éléments de A multipliés par 2. Autrement dit, chacune des colonnes de A est multipliée par 2. Chaque fois qu'une colonne est multipliée par 2, le déterminant l'est aussi. Puisqu'il y a n colonnes, $\det(2A)=2^n\det A$. L'égalité a donc uniquement lieu dans le cas très particulier des matrices 1×1 et est fausse si $n>1$.

(c) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Un système impossible n'est jamais homogène.*

En effet, un système homogène est un système du type $Ax=0$. Il possède la solution $x=0$ et ne peut par conséquent pas être impossible (ce qui, pour rappel, signifie qu'il ne possède pas de solution).

(d) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *L'équation de la tangente au graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au point d'abscisse x_0 s'écrit $f(x) = f(x_0) + \partial_x f(x)(x - x_0)$.*

Il y a deux raisons pour lesquelles on ne peut affirmer une telle chose. Tout d'abord, on est au point d'abscisse x_0, donc la dérivée doit être prise en ce point, i.e. on doit avoir $\partial_x f(x_0)$ au lieu de $\partial_x f(x)$. Ensuite, il s'agit de l'*équation* d'une droite qui doit sélectionner les points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ qui appartiennent à cette droite, elle doit donc être une relation entre les variables x et y. L'équation correcte s'écrit $y = f(x_0) + \partial_x f(x_0)(x - x_0)$.

Question 13.

(a) *Soit A l'ensemble des vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ qui sont simultanément orthogonaux à $(2,1,-3)$ et à $(-1,1,4)$. Décrivez géométriquement cet ensemble. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

(b) *Soit l'ensemble $B = \{(x,y,z) : (x,y,z)$ appartient à une droite dont un vecteur directeur est $(-7,5,-3)\}$. Montrez que A est contenu dans B.*

(c) *A-t-on $B \subseteq A$? Prouvez votre réponse (qu'elle soit positive ou négative).*

(a) Soit (x,y,z) un vecteur qui est simultanément orthogonal à $(2,1,-3)$ et à $(-1,1,4)$. On a alors

$$(x,y,z) \cdot (2,1,-3) = 0 \qquad \text{et} \qquad (x,y,z) \cdot (-1,1,4) = 0.$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 & (5) \\ -x + y + 4z = 0 & (6) \end{cases}$$

En faisant $(5) - (6)$, on obtient $x = \frac{3}{7}z$ et en remplaçant dans (6), on trouve $y = -\frac{5}{3}z$. L'ensemble recherché est donc

$$A = \Big\{ \big(\frac{7}{3}\alpha, -\frac{5}{3}\alpha, \alpha\big) : \alpha \in \mathbb{R} \Big\}. \tag{7}$$

Il s'agit de la droite passant par $(0,0,0)$ et dont un vecteur directeur est $(\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, 1)$.

(b) Comme A est une droite, pour établir que $\forall (x,y,z),\ (x,y,z) \in A \Rightarrow (x,y,z) \in B$, il suffit de montrer qu'un vecteur directeur de A est $(-7,5,-3)$. Au point précédent, on a vu qu'un vecteur directeur de cette droite est donné par $(\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, 1)$. Tout multiple non nul de ce vecteur est encore un vecteur directeur de A. Donc $-3(\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, 1) = (-7,5,-3)$ est aussi un vecteur directeur de A.

(c) On a $B \not\subseteq A$, c'est-à-dire qu'on peut trouver un vecteur de B qui ne soit pas dans A. Considérons la droite
$$D \equiv (x,y,z) = (1,0,0) + \alpha(-7,5,-3), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$
Un vecteur directeur de D est bien $(-7,5,-3)$. Comme $(1,0,0) \in D$, on a $(1,0,0) \in B$ (par définition de B). Montrons que $(1,0,0) \notin A$. En effet, si c'était le cas, on devrait avoir (au vu de (7)) que $(1,0,0) = (\frac{7}{3}\alpha, -\frac{5}{3}\alpha, \alpha)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il devrait exister un α solution du système
$$\begin{cases} 1 = \frac{7}{3}\alpha \\ 0 = -\frac{5}{3}\alpha \\ 0 = \alpha \end{cases}$$
Or ce système est impossible (la première équation implique $\alpha = 3/7$ alors que la dernière dit $\alpha = 0$). On ne pouvait donc supposer que $(1,0,0) \in A$.

Question 14. *Soit la matrice*
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) *Calculez, si possible, M^{-1}.*

Utilisons la méthode de la matrice compagnon.

$$\begin{array}{ccc}
M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3/6 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/6 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow -L_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/6 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 + 7L_3 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/6 & -1 & 7/6 \\ -1/6 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 & \begin{pmatrix} 5/6 & 0 & 1/6 \\ -1/6 & -1 & 7/6 \\ -1/6 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \\
\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1/6 & -1 & 7/6 \\ -1/6 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} = M^{-1}
\end{array}$$

(b) *Résolvez le système*

$$\begin{cases} x+y-z=5 \\ x+6z=5 \\ x+y+5z=10 \end{cases}$$

Ce système s'écrit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$. On a donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1}M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1/6 & -1 & 7/6 \\ -1/6 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 35/6 \\ 5/6 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des solutions est donc le singleton $\left\{\left(0, \frac{35}{6}, \frac{5}{6}\right)\right\}$.

Question 15. *Prouvez que tout nombre complexe $\rho\cos\theta$, où $\rho \in [0,+\infty[$ et $\theta \in [0,2\pi[$, est le carré d'un complexe. Y a-t-il une seule façon d'écrire $\rho\cos\theta$ comme carré d'un complexe ?*

Distinguons deux cas :

- si $\rho\cos\theta \geqslant 0$, c'est-à-dire si $\theta \in [0,\pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi[$, alors $\rho\cos\theta = w^2$ avec $w := \sqrt{\rho\cos\theta}$.
- si $\rho\cos\theta < 0$, c'est-à-dire si $\theta \in]\pi/2, 3\pi/2[$, alors $\rho\cos\theta = w^2$ avec $w := \boldsymbol{i}\sqrt{-\rho\cos\theta}$.

Il y a exactement deux manières d'écrire un nombre complexe z comme le carré d'un autre car l'équation $w^2 = z$ admet exactement deux solutions w (opposées l'une de l'autre).