Mathématique Élémentaire

Examen (19 janvier 2006)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (math, phys, ou info) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez /4

- $\sum_{p=0}^{n} \sum_{t=-1}^{n} (1-t^2) - \sum_{p=-1}^{n} \sum_{t=0}^{n} (1-t^2)$

- $\sum_{s=0}^{\ell} \binom{\ell}{s} \frac{1}{2^s}$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Calculez $\partial_t \left(\sin e^{t^2+2t+\sqrt{t}}, \ln \frac{1}{t} \right)$ $/4$

Question 3. Effectuez les calculs suivants (lorsque c'est possible) : $/4$

- $z \cdot \operatorname{cis}(\pi/6)$, où $z \in \mathbb{C}$ est déterminé par $z^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$ et $\Re z > 0$.

- $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables. Prouvez par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que /5

$$\partial^n \big(f \cdot g\big)(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \partial^i f(x) \cdot \partial^{n-i} g(x)$$

Question 5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Prouvez la proposition suivante : /3

$$\big(\forall \varepsilon > 0,\ |a-b| \leqslant \varepsilon\big) \Rightarrow a = b$$

Veillez à la qualité de votre rédaction.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Considérons l'ensemble $U_{10} := \{z \in \mathbb{C} : z^{10} = 1\}$. /7

- Prouvez que si $z, w \in U_{10}$, alors $z \cdot w \in U_{10}$.

- Peut-on affirmer que si $z \in U_{10}$ alors $\overline{z} \in U_{10}$? Justifiez.

- Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $U_{10} \subseteq U_n$ avec $U_n := \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$? Justifiez en détail votre réponse.

Nom :

Prénom :

Section :

/7

Question 7. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Donnez la matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que $A^{-1} = M$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Mathématique Élémentaire

Examen (19 janvier 2006)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 7 (suite).

(b) En utilisant le point précédent, résolvez le système

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ -4x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

Question 8. On considère la proposition suivante : /4

$$(A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge \neg \boxed{} \Rightarrow B \vee C \tag{1}$$

Remplissez la case vide par A, B ou C de manière à ce que (1) soit une tautologie. Prouvez que votre réponse est correcte en dressant une table de vérité de (1).

Nom :

Prénom :

Section :

/7

Question 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur tout $\mathbb{R}$.

- Définissez « f est strictement croissante ».

- Définissez « f est injective ».

- Prouvez que si f est strictement croissante, alors f est injective. La qualité de votre rédaction est importante.

- On considère la famille de fonctions $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + 1$. Quelles sont les valeurs des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $f_{a,b}$ est strictement croissante ?

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10.

/8

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Complétez la définition suivante :

$$\min\{a,b\} = \begin{cases} \boxed{} & \text{si } a \geqslant b \\ \boxed{} & \text{si } a < b \end{cases}$$

- Complétez de manière à ce que l'équivalence suivante soit vraie :

$$\min\{a,b\} \leqslant c \quad \Leftrightarrow \quad a \leqslant c \ \boxed{} \ b \leqslant c \tag{2}$$

  où $a, b \in \mathbb{R}$. Prouvez que la manière dont vous avez complété (2) la rend vraie.

- Écrivez l'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ ci-dessous sous la forme d'une union finie d'intervalles (éventuellement non-bornés) :

$$A := \Big\{x \in \mathbb{R} : \min\Big\{|x|, \frac{1}{x}\Big\} \leqslant 1\Big\}$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Question 11. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. /4

- Donnez une définition de l'inverse de A.

- Sous quelle(s) condition(s) l'inverse de A existe-t-il ? On ne demande pas de justifier.

- Montrez que l'inverse de A, s'il existe, est unique.

Nom :

Prénom :

Section :

/6

Question 12. Résolvez le système

$$\begin{cases} x+\lambda y=\lambda \\ \lambda x-y=0 \\ \lambda x+\lambda y=1 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13. soient les ensembles /7

$$A := \left\{\alpha : \alpha \text{ est un plan perpendiculaire à la droite } D \equiv x-1 = \frac{2-y}{2} = 3z+1\right\}$$

et $$B := \left\{\beta : \beta \text{ est un plan dont un vecteur normal est } (-6,12,-2)\right\}$$

(a) Soit le plan $\gamma \equiv 3x-6y+z=7$. A-t-on $\gamma \in A$? Justifiez.

(b) Soit le plan $\delta \equiv 6x-12y+2z=3$. A-t-on $\delta \in B$? Justifiez.

(c) Montrez que $A = B$. Détaillez votre raisonnement.

Mathématique Élémentaire

Examen

(19 janvier 2006)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Supplément uniquement pour les étudiants faisant l'agrégation.

Question 1. /10

- Soit $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$. Définissez en ε-δ la notion « f est continue en a ».

- En utilisant cette définition, prouvez que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est continue en 0. La qualité de votre rédaction est importante.

Mathématique Élémentaire

Examen (19 janvier 2006)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. On considère les fonctions $f_1 :]-2,-1[\cup]1,2[\to \mathbb{R}$ et $f_2 :]-1,0[\cup]0,1[\to \mathbb{R}$ définies par /10

$$f_i(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad (i = 1,2).$$

(a) Tracez les graphes de f_1 et f_2 sur les dessins ci-dessous.

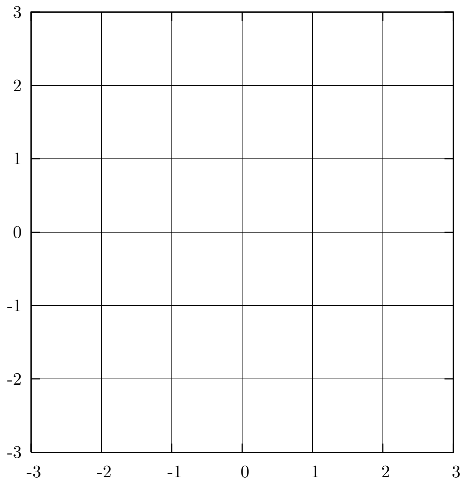

FIG. 1 – Graphe de f_1

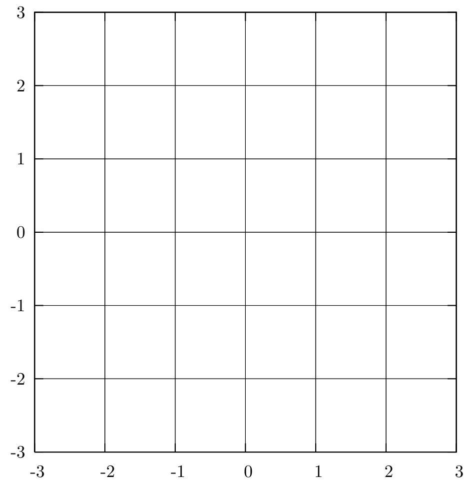

FIG. 2 – Graphe de f_1

(b) Peut-on prolonger ces fonctions en des fonctions continues sur $\mathbb{R}$? Autrement dit, peut-on trouver des fonctions continues $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \operatorname{Dom} f_i,\ g_i(x) = f_i(x)$ $(i = 1,2)$?

Mathématique Élémentaire

Examen (19 janvier 2006)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Pour montrer que la proposition

$$\forall \rho \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leqslant \rho \tag{1}$$

/7

est fausse pour l'ensemble $A =]1, +\infty[$, un étudiant tient le raisonnement suivant :

> Prenons $\rho = 10$. On n'a pas que $\forall x \in A,\ x \leqslant 10$. En effet, en considérant $x = 11$, qui est un élément de A, on aurait $11 \leqslant 10$. Cette contradiction montre que (1) est faux.

Ce raisonnement est-il correct ? Expliquez.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Question 4. Un de vos élèves, Jack Dongerra, se demande pourquoi on ne peut pas faire z^w avec $z, w \in \mathbb{C}$. En effet, dit-il, on a commencé par définir, pour $n \in \mathbb{N}$, $z^n = z \cdots z$ (n fois), ensuite $z^{-n} = 1/z^n$ ($n \in \mathbb{N}$), puis $z^{p/q} = \sqrt[q]{z^p}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$) et enfin $z^r = \lim_{p/q \to r} z^{p/q}$. Que lui répondez-vous ? /3