Mathématique Élémentaire

Examen (2 juin 2006)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Quelle est la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes ? /4

(a) $\big((-1,2)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $y=-2x+3\big) \vee \big(|\pi| = 3{,}14\big)$

(b) $\big(\forall x,y\in\mathbb{R},\ x^2 \leqslant y^2\big) \Rightarrow \big(\forall x,y\in\mathbb{R},\ x^3 \leqslant y^3\big)$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. La proposition suivante est-elle une tautologie ? /4

$$\big(P \Rightarrow (Q \vee R)\big) \Leftrightarrow \big((P \wedge \neg Q) \Rightarrow R\big)$$

Expliquez votre démarche.

Question 3. Montrez, par récurrence, que $\forall n \geqslant 2,\ \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$. /5

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /8

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Écrivez l'ensemble $\Sigma := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geqslant x - 2\}$ sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (éventuellement non-bornés).

Nom :

Prénom :

Section :

/8

Question 5. Soient les droites

$$D_1 \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{5} \qquad\qquad D_2 \equiv x+\lambda = y-3 = z-2$$

et les plans

$$\alpha_1 \equiv 2x+y-2z = \gamma \qquad\qquad \alpha_2 \equiv 6x+\beta y-10z = 12$$

où λ, γ et β sont des paramètres réels.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de γ la droite D_1 est-elle parallèle au plan α_1 ?

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de γ la droite D_1 est-elle contenue dans le plan α_1 ?

(c) Pour quelle(s) valeur(s) de β la droite D_1 est-elle perpendiculaire au plan α_2 ?

(d) Pour quelle(s) valeur(s) de λ les droites D_1 et D_2 ont-elles un point d'intersection ?

Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Question 6. Écrivez le nombre complexe $\sum_{n=0}^{2006} (1+\mathbf{i})^n$ sous la forme $\alpha + \beta\mathbf{i}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. /5

Mathématique Élémentaire

Examen (2 juin 2006)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Dans le corps des complexes, résolvez l'équation suivante de manière algébrique et graphique. /7

$$X^6 + 27 = 0$$

Veillez à la qualité de vos explications.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. On considère la courbe C dans le plan X-Y paramétrée par la fonction /5

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\sin(2t), \mathrm{e}^{\sqrt{t}} \cos t\right)$$

Donnez tous les points de C en lesquels la tangente (si elle existe) est parallèle à l'axe des Y.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x}$. Montrez par récurrence sur k que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists P_k \in \mathbb{P}^{2k}, \quad \partial_x^k f(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \mathrm{e}^{-1/x}$$

où $\mathbb{P}^d$ désigne l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant d$.

/5

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Soit le système

/8

$$\begin{pmatrix} k-1 & 0 & 1 \\ -1 & k & 2 \\ 2 & 0 & k+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminez pour quelle(s) valeur(s) de k le système possède

(a1) une unique solution

(a2) une infinité de solutions

(a3) aucune solution

(b) Résolvez le système dans le cas où $k = 1$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11. Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $\det A \neq 0$. On dit que A est une matrice *orthogonale* si la transposée de A est égale à son inverse.

/6

(a) Montrez que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale.

(b) Montrez que le déterminant d'une matrice orthognale ne peut valoir que 1 ou -1. (Les propriétés suivantes peuvent vous être utiles : si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, alors $\det(AB) = \det A \det B$ et $\det A^t = \det A$.)