Mathématique Élémentaire

Examen

(17 août 2006)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez

/5

- $\sum_{k=2}^{\ell}(2+k^2) =$
- $\sum_{k=1}^{t}\sum_{\ell=1}^{k}(1+k) =$
- $\sum_{k=1}^{t}\sum_{\ell=1}^{t}(1+m) =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2.

/6

(a) Donnez une équation cartésienne du plan α passant par $(1,-2,5)$ et parallèle au plan OYZ. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

(b) Donnez une équation cartésienne du plan β passant par le point $(2,-1,4)$ et perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations $4x+2y+2z=-1$ et $3x+6y+3z=7$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /6

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Écrivez l'ensemble $\Sigma := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < x\}$ sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (éventuellement non-bornés).

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Résolvez, dans $\mathbb{C}$, l'équation $x^5 = -1$. Tracez (approximativement) les solutions dans le plan complexe. Expliquez votre démarche et justifiez vos calculs.

/6

Mathématique Élémentaire

Examen (17 août 2006)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Soit le système suivant, noté S : /5

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = a_4 \\ b_1x + b_2y + b_3z = b_4 \end{cases} \tag{1}$$

où $a_i \in \mathbb{R}$ et $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

- Définissez « (x_0, y_0, z_0) est solution de S ».
- On considère le système S' qui est le système S dans lequel on a effectué la transformation suivante : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$. Montrez que si (x_0, y_0, z_0) est une solution du système S, alors (x_0, y_0, z_0) est aussi solution du système S'.

Question 6. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices. /2

- Définissez « B est l'inverse de A ».
- Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Supposons que A est inversible. Montrez que l'inverse de la matrice λA est la matrice $\frac{1}{\lambda} A^{-1}$.

Mathématique Élémentaire

Examen (17 août 2006)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Soit $u = -4 + 4\mathbf{i}$. /5

- Donnez la forme trigonométrique de u.

- Donnez le conjugué de u.

- Déterminez la forme trigonométrique du nombre complexe w tel que $2w^3 = u$ et w est d'argument $< \pi/2$.

Question 8. Prouvez que $(1+\mathbf{i})^{4n} - (-1)^n 4^n = 0$ quelque soit $n \in \mathbb{Z}$. /2

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. On considère la courbe C dans le plan X-Y paramétrée par la fonction /5

$$\gamma :]0,+\infty[\to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(1+\sqrt{t}, t^{3/2}\right)$$

Donnez tous les points de C en lesquels la tangente existe et est parallèle au vecteur $(1,1)$.

Mathématique Élémentaire

Examen (17 août 2006)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10. Soit $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ une matrice. Écrivez l'expression /3

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i+1} a_{ij} + a_{i,j+1}$$

avec la somme sur j en première position et celle sur i en seconde (sans bien entendu changer la valeur de cette expression). Expliquez votre démarche.

Question 11. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. (Il n'est pas demandé de justifier.) /3

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $(AB)^2 = A^2B^2$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $(AB^{-1})(BA^{-1}) = \mathbb{1}$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $(A-B)^2 = (B-A)^2$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ $(A^{-1}$ existe et $AB = 0) \Rightarrow B = 0$.

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si A^{-1} existe, alors $\det A^{-1} \neq 0$.

Mathématique Élémentaire

Examen (17 août 2006)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Calculez, par récurrence sur $n \geqslant 1$, le déterminant de la matrice $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ où /5

$$a_{ij} = \begin{cases} j & \text{si } j \leqslant i \\ i & \text{si } j > i \end{cases}$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13. Donnez une équation cartésienne du plan α passant par les points $(1,2,-1)$, $(2,3,1)$ et $(3,-1,2)$. $/4$

Question 14. Niez la phrase : $\exists \rho > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x-1| > \rho \Rightarrow x^2 > 1+\rho^2$. $/2$